

# Modellierung von Hydrosystemen - SoSe 2024

## BHYWI-22-B2-T1.2: Grundwasserhydraulik-Prinzipbeispiel

Olaf Kolditz, Lars Bilke, Karsten Rink, Haibing Shao, Erik Nixdorf

<sup>1</sup>Helmholtz Centre for Environmental Research – UFZ, Leipzig

<sup>2</sup>Technische Universität Dresden – TUD, Dresden

<sup>3</sup>Center for Advanced Water Research – CAWR

<sup>4</sup>TUBAF-UFZ Center for Environmental Geosciences – C-EGS, Freiberg / Leipzig

<sup>4</sup>Bundesanstalt für Geowissenschaften und Rohstoffe – BGR, Hannover / Cottbus

Dresden, 21.06.2024

# Zeitplan: Modellierung von Hydrosystemen: Zweiter Block (B2)

Sommersemester 2024: BHYWI-22-B2

Datum	B2	Thema	Format
12.04.2024	B2-T1.0	Einführung in die Veranstaltung (B2) (Kolditz)	HSZ/401
21.06.2024	B2-T1.1	Hydromechanik und Numerische Methoden (Kolditz)	HSZ/403
21.06.2024	B2-T1.2	Grundwasserhydraulik und Prinzipbeispiel (Kolditz)	HSZ/403
21.06.2024	B2-T1.3	Finite-Differenzen-Methode: Explizit (Kolditz)	HSZ/403
21.06.2024	B2-T1.4	Finite-Differenzen-Methode: Implizit (Kolditz)	HSZ/403
28.06.2024	B2-T4.1	Virtuelle VISLAB Tour - Vorlesung (Rink/Bilke)	Online
28.06.2024	B2-T4.2	Virtuelle VISLAB Tour - Demo (Rink/Bilke)	Online
05.07.2024	B2-T3.1	Stofftransport in Hydrosystemen (Shao/Chen)	HSZ/403
05.07.2024	B2-T3.2	Stofftransport in Hydrosystemen (Shao/Chen)	HSZ/403
05.07.2024	B2-T3.3	Stofftransport in Hydrosystemen (Shao/Chen)	HSZ/403
12.07.2024	B2-T2.1	Regionale Grundwassersysteme (Nixdorf)	HSZ/403
12.07.2024	B2-T2.2	Regionale Grundwassersysteme (Nixdorf)	HSZ/403
12.07.2024	B2-T2.3	Regionale Grundwassersysteme (Nixdorf): Übung	HSZ/403
19.07.2024	B2-T1.6	Zusammenfassung der Veranstaltung Numerik (Kolditz)	HSZ/403
19.07.2024	B2-T1.7	Zusammenfassung der Veranstaltung (Hartmann/Kolditz)	HSZ/403
19.07.2024	B2-T1.8	Vorbereitung Klausur (Hartmann/Kolditz)	HSZ/403

# Übersicht der Lehrveranstaltung: Lehre-Webseite

The screenshot shows the website of the UFZ (Helmholtz Zentrum für Umweltforschung). The main navigation bar includes 'UFZ', 'Themenbereiche / Departments', 'Forschung', 'Medien & Presse', 'Veranstaltungen', and 'Karriere & Jobs'. The breadcrumb trail is: Themenbereiche / Departments > Smarte Modelle und Monitoring > Umweltinformatik > Lehre > Hydrosystemanalyse.

The page title is 'Professur für Grundwasserwirtschaft / Professur für Angewandte Umweltsystemanalyse / Modellierung von Hydrosystemen (BHYWI 22)'. The semester is 'Sommersemester 2022'. The course is described as a 'Hybride Veranstaltung: Freitags, 4.-5./6. DS: 13:00 - 16:20/18:10 Uhr' with '2 Blöcke (Prof. Hartmann / Prof. Kolditz)'. The blocks are: 1. Block [08.04-22.05.2022]: Hydrosystemanalyse (Hartmann et al.) and 2. Block [27.05-15.07.2022]: Hydrosystemanalyse (Kolditz, Bilke, Nixdorf, Shao, Rink).

The central diagram illustrates the course structure. It features a central orange diamond labeled 'Systemanalyse'. To its left is a blue circle 'Wasser-Quantität' and to its right is a blue circle 'Wasser-Qualität'. Above the diamond is a purple box 'Numerische Methoden' and below it is a purple box 'Virtuelle Realitäten'. The word 'Simulation' is written above the diamond and 'Visualisierung' below it. Small circular portraits of the lecturers are placed around the diagram.

The 'Contact' section on the right provides contact information for 'Hydroinformatik II' and lists links for 'DPAL', 'Vorlesungen', 'Sprechstunde', and 'Notfall-Mobile'. Below this is an 'Events' section with links to 'Videovorlesung', 'Übungen', 'Online Tutorial', and 'Vorlesungsunterlagen'. A 'Publications' section is also visible, featuring a book cover for 'Computational Methods in Environmental Fluid Mechanics' by O. Kolditz.

Link:

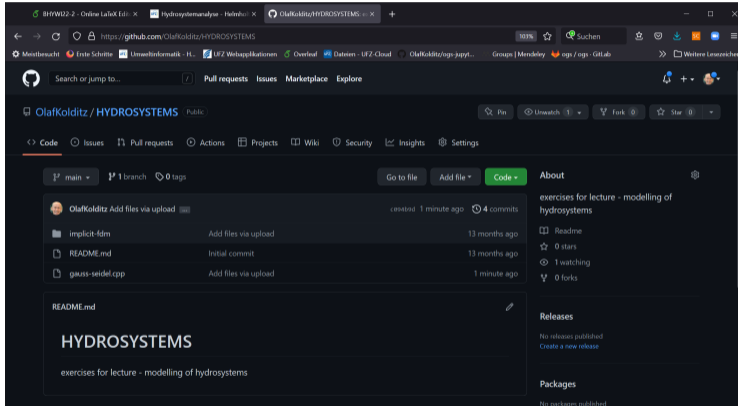
<https://www.ufz.de/index.php?de=40426>

# Übersicht der Lehrveranstaltung: Vorlesungsmaterial (overleaf)

The screenshot shows the Overleaf editor interface. The left sidebar displays a file explorer with a list of LaTeX files. The main editor area shows the rendered PDF of the document. The title page features a blue header with the text 'Modellierung von Hydrosystemen - SoSe 2022' and 'BHYWI-22-B2-T1.0: Einführung in die Lehrveranstaltung (B2)'. Below the title, the authors' names are listed: Olaf Kolditz, Lars Bilke, Karsten Rink, Haibing Shao, and Erik Nixdorf. A list of affiliations follows, including the Helmholtz Centre for Environmental Research (UFZ), Technische Universität Dresden (TUD), and the Center for Advanced Water Research (CAWR). The date 'Dresden, 27.05.2022' is printed at the bottom of the page. The table of contents lists two main blocks of the course. The first block, 'Block 1: IGW (Prof. Hartmann)', is scheduled for 08.04-20.05.2022. The second block, 'Block 2: Hydrosystemanalyse (Olaf Kolditz, Lars Bilke, Karsten Rink, Haibing Shao, Erik Nixdorf)', is scheduled for 27.05-15.07.2022.

Link: <https://www.overleaf.com/read/szgpcjggwdqc>

# Übersicht der Lehrveranstaltung: Übungen (github)



Link: <https://github.com/OlafKolditz/HYDROSYSTEMS>

- ▶ git clone
- ▶ git fetch -all
- ▶ git pull

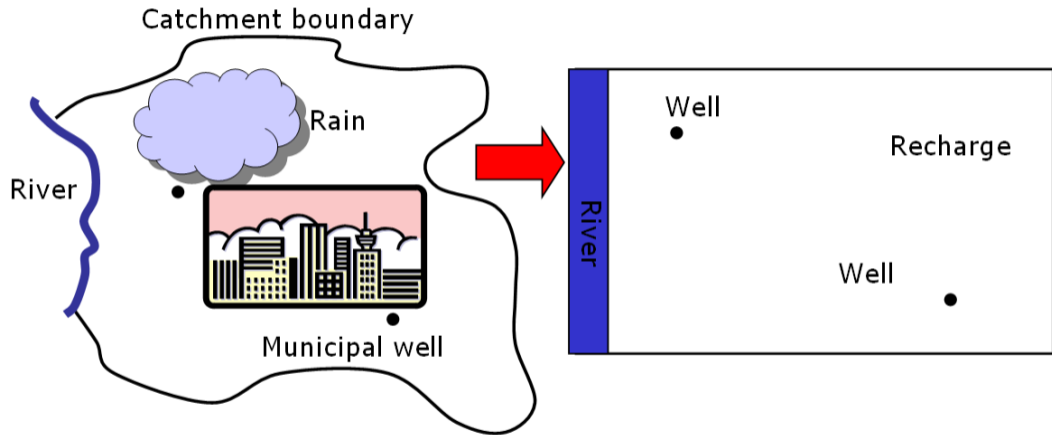
siehe Tutorial <https://www.overleaf.com/read/vyxbhdmfczpf>

# Grundwasserströmung

Einführung

- Prinzipbeispiel

# Prinzip-Beispiel



Quelle: Sebastian Bauer (Uni Kiel)

River:  
Fixed head  
boundary  
condition  
 $H = 10 \text{ m}$

No flow – e.g. fault

- Pumping well  
 $Q_{P2} = 0.001 \text{ m}^3/\text{s}$

Recharge: homogeneous and constant  
 $R = 1.0\text{e-}8 \text{ m}^3/(\text{m}^2\text{s})$

- Pumping well  
 $Q_{P6} = 0.005 \text{ m}^3/\text{s}$

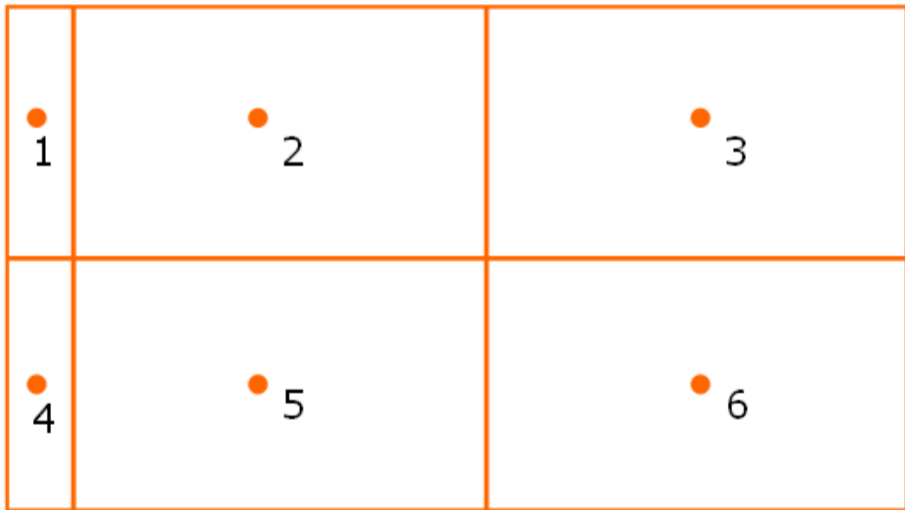
No flow – water divide

No flow - streamline

Fig.: Definition der Randbedingungen



# Prinzip-Beispiel



$\Delta y_1 = 500 \text{ m}$   
 $\Delta y_2 = 500 \text{ m}$

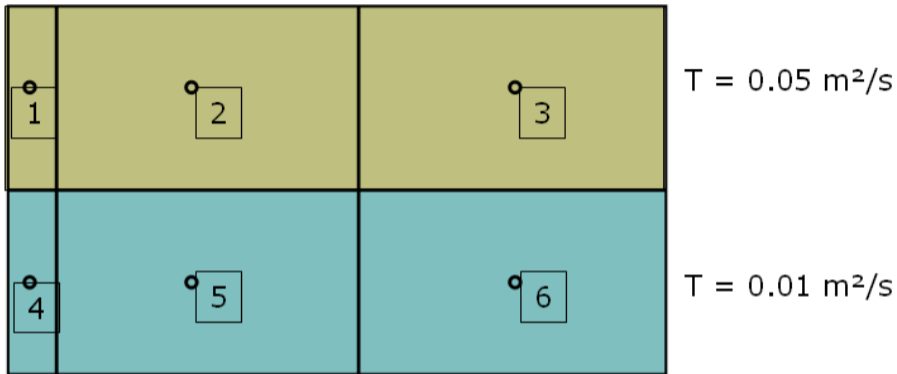


Fig.: Definition der Materialgruppen

$$T = \frac{K}{S}$$

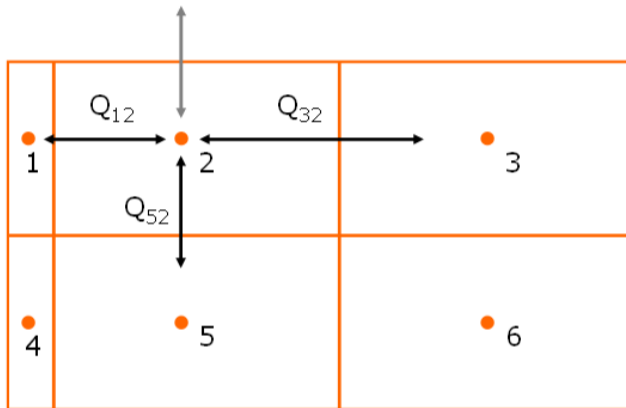


Fig.: Knoten-Bilanz aufstellen (Tafelbild)

$$Q_{12} + Q_{32} + Q_{52} + Q_R + Q_{P2} = 0$$

Wir benutzen folgendes Differenzenschema.

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{h_i - h_j}{x_i - x_j} \quad (3)$$

$$\frac{\partial h}{\partial y} = \frac{h_i - h_j}{y_i - y_j} \quad (4)$$

Da unser FD-Gitter weder equidistant und unser Aquifer noch heterogen ist, schreiben wir besser.

$$\frac{\partial h}{\partial x} \Big|_{12} = \frac{h_1 - h_2}{\Delta x_1/2 + \Delta x_2/2} \quad (5)$$

- ▶ Berechnung von (hydraulischen) Widerständen - harmonisches Mittel

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

- ▶ Transmissivität

$$T_{25} = \frac{\Delta y_2 + \Delta y_5}{\Delta y_2 / T_2 + \Delta y_5 / T_5}$$

$$T_{23} = \frac{\Delta x_2 + \Delta x_3}{\Delta x_2 / T_2 + \Delta x_3 / T_3}$$

$$Q_x = \Delta y T_x \frac{\partial h}{\partial x}$$

Damit können wir für die Flussterme schreiben.

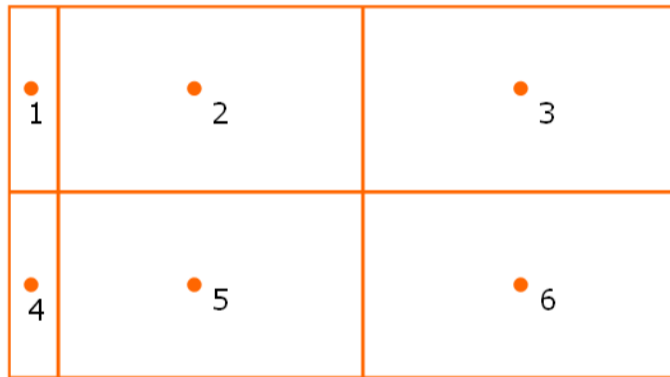
$$Q_{12} = \Delta y_1 \frac{\Delta x_1 + \Delta x_2}{\Delta x_1 / T_1 + \Delta x_2 / T_2} \times \frac{h_1 - h_2}{\Delta x_1 / 2 + \Delta x_2 / 2} \quad (6)$$

$$Q_{52} = \Delta x_2 \frac{\Delta y_5 + \Delta y_2}{\Delta y_5 / T_5 + \Delta y_2 / T_2} \times \frac{h_5 - h_2}{\Delta y_5 / 2 + \Delta y_2 / 2} \quad (7)$$

$$Q_{32} = \Delta x_2 \frac{\Delta x_3 + \Delta x_2}{\Delta x_3 / T_3 + \Delta x_2 / T_2} \times \frac{h_3 - h_2}{\Delta x_3 / 2 + \Delta x_2 / 2} \quad (8)$$

► Tafelbild

# Prinzip-Beispiel



$$\Delta x_1 = 100 \text{ m}$$

$$\Delta x_2 = 1000 \text{ m}$$

$$\Delta x_3 = 1000 \text{ m}$$

$$\Delta y_1 = 500 \text{ m}$$
$$\Delta y_2 = 500 \text{ m}$$

Die Zahlen eingesetzt ergibt sich für

$$Q_{12} = 0.454545 - 0.0454545h_2$$

$$Q_{52} = 0.033333h_5 - 0.033333h_2$$

$$Q_{32} = 0.02500h_3 - 0.02500h_2$$

$$Q_R = R\Delta x_2\Delta y_1 = 0.005$$

$$Q_{P2} = -0.001 \quad (9)$$

$$Q_{12} + Q_{32} + Q_{52} - Q_R - Q_{P2} = 0 \quad (10)$$

- ▶ Bilanzgleichungen für alle Zellen (2,3,4,5):

$$\begin{aligned}2 : 0.458545 - 0.103788h_2 + 0.025h_3 + 0.03333h_5 &= 0 \\3 : 0.0050 + 0.0250h_2 - 0.0583h_3 + 0.0333h_6 &= 0 \\5 : 0.0959 + 0.0333h_2 - 0.0474h_3 + 0.0050h_6 &= 0 \\6 : 0.0000 + 0.0333h_3 + 0.0050h_5 - 0.0383h_6 &= 0\end{aligned}\tag{11}$$

- ▶ Gleichungssystem lösen

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}\tag{12}$$



Ergebnis:

$$h_1 = 10.00$$

$$h_2 = 10.24$$

$$h_3 = 10.41$$

$$h_4 = 10.00$$

$$h_5 = 10.31$$

$$h_6 = 10.39$$

(13)

(14)

- ▶ Gauss-Seidel Verfahren
- ▶ Umstellung des Gleichungssystems

$$h_2 = 0.2408h_3 + 0.3211h_5 + 4.4181$$

$$h_3 = 0.4285h_2 + 0.5714h_6 + 0.0857$$

$$h_5 = 0.7028h_2 + 0.1054h_6 + 2.0223$$

$$h_6 = 0.8695h_3 + 0.1304h_5$$

- ▶ Konstruktion eines iterativen Lösungsverfahrens
- ▶ Pro: Es muss kein Gleichungssystem gelöst werden.
- ▶ Con: Es kann auch mal nicht klappen (keine Konvergenz).

$$h_{2,i+1} = 0.2408h_{3,i} + 0.3211h_{5,i} + 4.4181$$

$$h_{3,i+1} = 0.4285h_{2,i} + 0.5714h_{6,i} + 0.0857$$

$$h_{5,i+1} = 0.7028h_{2,i} + 0.1054h_{6,i} + 2.0223$$

$$h_{6,i+1} = 0.8695h_{3,i} + 0.1304h_{5,i}$$

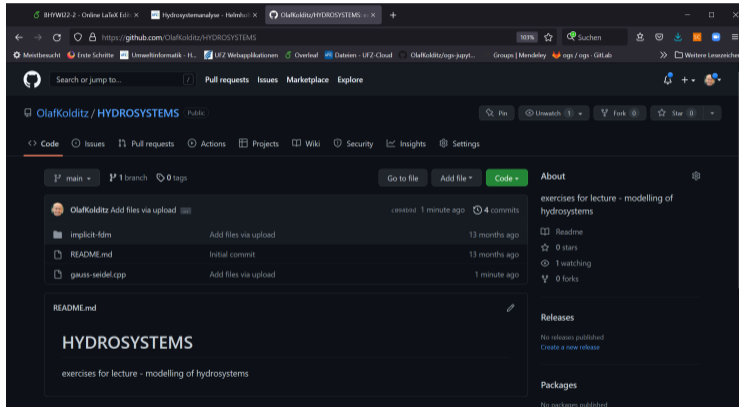
```
1 void Dialog::GaussSeidel()  
2 {  
3     for(int k=0;k<solver_iterations;k++)  
4     {  
5         x[1] = 0.2408 * x[2] + 0.3211 * x[4] + 4.4181;  
6         x[2] = 0.4285 * x[1] + 0.5714 * x[5] + 0.0857;  
7         x[4] = 0.7028 * x[1] + 0.1054 * x[5] + 2.0223 ;  
8         x[5] = 0.8695 * x[2] + 0.1304 * x[4];  
9         TestOutput(x);  
10    }  
11 }
```

Listing 1: C++ code for Gauss-Seidel solver

# Übung

- Prinzipbeispiel Grundwassermodell

# Übersicht der Lehrveranstaltung: Übungen (github)

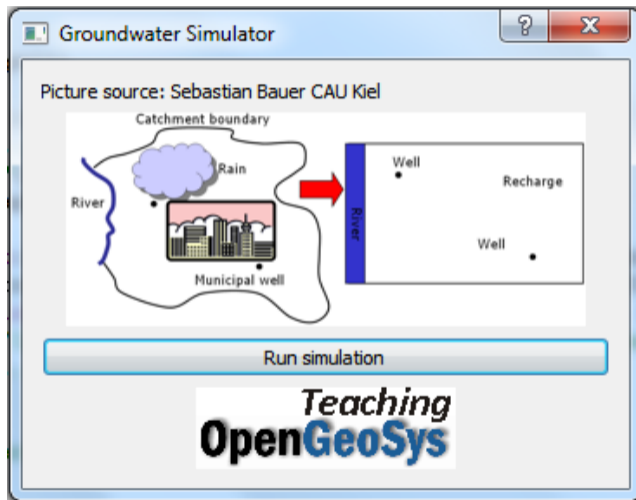


Link: <https://github.com/OlafKolditz/HYDROSYSTEMS>

- ▶ git clone
- ▶ git fetch -all
- ▶ git pull

siehe Tutorial <https://www.overleaf.com/read/vyxbhdmfczpf>

# Übung: Prinzipbeispiel Grundwassermodell



- ▶ Gauss Eliminierungsverfahren (direkte Methode)
- ▶ Gauss-Seidel Verfahren (iterative Methode)

# Übung: Prinzipbeispiel Grundwassermodell

BHYWI-22-E1-Qt-Grundwasser-Prinzip

```
1 void Dialog::on_pushButtonRUN_clicked()
2 {
3     switch(solver_method)
4     {
5         case 0: //Gauss
6             AssembleEQS(); //assemble equation system
7             TestOutput(A,b);
8             Gauss(A,b,x,n); //solve EQS via Gauss
9             break;
10        case 1: //Gauss-Seidel
11            //CalculateFluxes();
12            GaussSeidel();
13            msgBox.setText("Gauss-Seidel method finished, \n results in out.txt");
14            break;
15        case 3: // neues Verfahren
16            msgBox.setText("Neues Verfahren vorbereitet");
17            break;
18    }
19 }
```

Listing 2: C++ code for solver selection

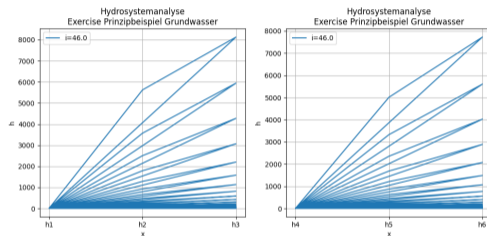


# Übung: Prinzipbeispiel Grundwassermodell

C++ und Python

```
1 //C++ Programm kompilieren
2 g++ gauss-seidel-plt.cpp
3
4 //Programm ausfuehren
5 a.exe
6
7 //Ergebnisse mit Python plotten
8 python data_from_file_txt2.py
```

Listing 3: C++/Python code



Exercise (github repository)

..\HYDROSYSTEMS\grundwasser-prinzip\

# Übung

- Software-Installationen

- ▶ (1) Versionsmanagement: git
- ▶ (2) C++ Compiler: MinGW
- ▶ (3) Programmier-Framework: Python
- ▶ (4) Grafiken: matplotlib

```
1 python -m pip install -U pip
2 python -m pip install -U matplotlib
```

Listing 4: matplotlib Installation

- ▶ (1) Versionsmanagement: Übung runterladen
- ▶ (2) C++ Compiler: Quellcode übersetzen
- ▶ (3) Python: Post-processing und Darstellung

```
1 cd ... (Verzeichnis auswaehlen)
2 git clone https://github.com/OlafKolditz/HYDROSYSTEMS.git
3 set PATH=%PATH%;C:\MinGW\bin (Pfad fuer Compiler setzen)
4 g++ gauss-seidel-plt.cpp
5 python data_from_file_txt2.py
```

Listing 5: Übung

```
1 cd ... \HYDROSYSTEMS \grundwasser-prinzip
```

Listing 6: Verzeichnis auswaehlen

run.bat

```
1 set PATH=%PATH%;C:\MinGW\bin
2 g++ gauss-seidel-plt.cpp
3 a.exe
4 python data_from_file_txt2.py
```

Listing 7: Skript