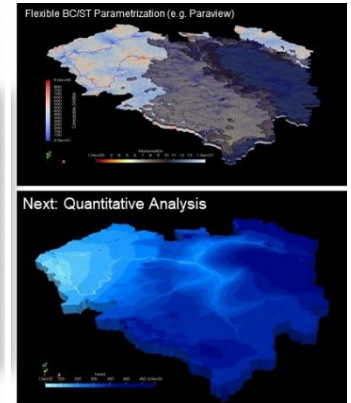
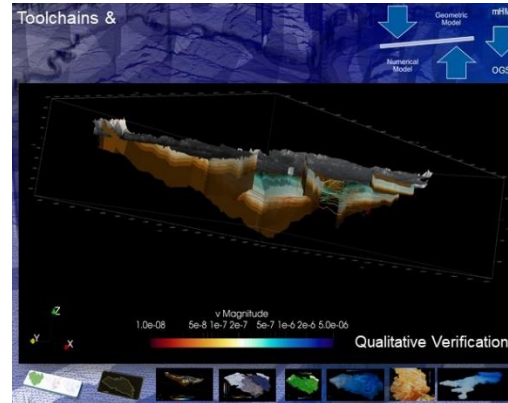


“Regionale Grundwassersysteme“ Modellierung von Hydrosystemen

Einführung / Grundwasserströmungsgleichung

Dr. Erik Nixdorf

25.06.2023



Arbeitsschwerpunkte

- Strömung und Transport in gekoppelten hydrologischen Systemen
- Analyse von Grundwasserströmungsprozessen auf der Einzugsgebietsskala mittels numerischer Prozessmodellierung
- Regionalisierung von hydrogeologischen Parametern mit Methoden des Maschinellen Lernens
- GIS-Analysen und -Workflowprogrammierung
- Konzipierung und Durchführung hydrologischer/hydrogeologischer Feldversuche und Messkampagnen

Lehrveranstaltungen

Aktuelle Lehrveranstaltungen

Hydrosystemanalyse (TU Dresden)

Catchment Scale Groundwater Modelling (GRAES, Peking)

Vergangene Lehrveranstaltungen

- Hydrological and Hydrogeological Field Methods (Graduiertenschule HIGRADE)



Hauptberufliche Anstellung:
Bundesanstalt für Geowissenschaften und Rohstoffe
Forschungs- und Entwicklungszentrum Bergbaufolgen (FEZB)

Gastanstellung:
Helmholtzzentrum für Umweltforschung
Department Umweltinformatik
Kontakt: erik.nixdorf@ufz.de

Regionale Grundwassersysteme

Zeitplan: Modellierung von Hydrosystemen: Zweiter Block (B2)

Sommersemester 2023: BHYWI-22-B2

Datum	B2	Thema	Format
16.06.2023	B2-T1.0	Einführung in die Veranstaltung (B2) (Kolditz)	HSZ/403
16.06.2023	B2-T1.1	Hydromechanik und Numerische Methoden (Kolditz)	HSZ/403
16.06.2023	B2-T1.2	Grundwasserhydraulik und Prinzipbeispiel (Kolditz)	HSZ/403
16.06.2023	B2-T1.3	Finite-Differenzen-Methode: Explizit (Kolditz)	HSZ/403
16.06.2023	B2-T1.4	Finite-Differenzen-Methode: Implizit (Kolditz)	HSZ/403
23.06.2023	B2-T2.1	Regionale Grundwassersysteme (Nixdorf)	HSZ/403
23.06.2023	B2-T2.2	Regionale Grundwassersysteme (Nixdorf)	HSZ/403
23.06.2023	B2-T2.3	Regionale Grundwassersysteme (Nixdorf): Übung	HSZ/403
30.06.2023	B2-T3.1	Stofftransport in Hydrosystemen (Shao/Chen)	HSZ/403
30.06.2023	B2-T3.2	Stofftransport in Hydrosystemen (Shao/Chen)	HSZ/403
30.06.2023	B2-T3.3	Stofftransport in Hydrosystemen (Shao/Chen)	HSZ/403
07.07.2023	B2-T4.1	Virtuelle VISLAB Tour - Vorlesung (Rink/Bilke)	VISLAB UFZ
07.07.2023	B2-T4.2	Virtuelle VISLAB Tour - Demo (Rink/Bilke)	VISLAB UFZ
14.07.2023	B2-T1.6	Zusammenfassung der Veranstaltung Numerik (Kolditz)	HSZ/403
14.07.2023	B2-T1.7	Zusammenfassung der Veranstaltung (Hartmann/Kolditz)	HSZ/403
14.07.2023	B2-T1.8	Vorbereitung Klausur (Hartmann/Kolditz)	HSZ/403



BHYWI-22-B2-T1.0: Einführung in die Lehrveranstaltung (B2) // 14.04.2023 / 16.06.2023

10 / 10

- Was wissen Sie schon aus den vergangenen Veranstaltungen?
 - Modellierungskonzepte, Modellkalibrierung, -evaluierung, Sensitivitätsanalyse (Block I)
 - Strömungsgleichungen und Numerische Lösungsverfahren (FDM und FEM)
 - Eingabe/Ausgabe für Simulationen mit OpenGeoSys 6 ?
 - Vieles mehr aus anderen Lehrveranstaltungen 😊

Die Unterlagen zum Kurs finden sie auf Nextcloud:
link: <https://nc.ufz.de/s/qwwrKpAmGFyj6sM>
pw: Grundwasser_2023

Regionale Grundwassersysteme -Aufbau

3 Teile, 2mal Vorlesung und 1mal Übung, Ende gegen **18:10**

V0: Ziel und Zweck numerischer Grundwasserströmungsmodelle

V1: Grundwasserströmungsgleichung

- Herleitung der Grundwassergleichung in der Potentialform
- Diskussion der Parameter des Grundwasserleiters
- Analytische Lösungen

V2: Grundwassermodellierung auf der Einzugsgebietsskala

- Räumlich-zeitliche Dimensionalität und Diskretisierung
- Randbedingungen und Quellterme

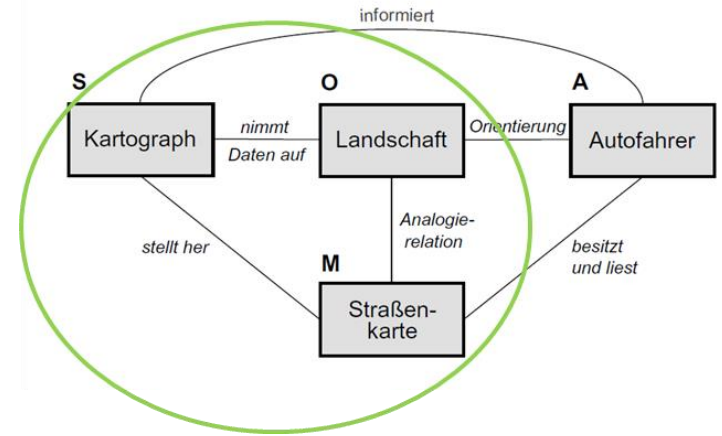
Übung mit OpenGeoSys und ParaView

- Analytische Lösungen vs. OpenGeoSys

Klausurfragen...

Modellbegriff

- **Modell:** (vereinfachendes) Abbild einer (partiellen) Realität, dem Original
- „Modell ist stets **Modell-wovon-wozu-für wen.**“ (Steinmüller)
- Das „wozu“ im Kontext der Grundwasserhydrologie:
 - Wie wird das Pumpverhalten den Grundwasserspiegel in der Nordchinesischen Ebene in den nächsten 100 Jahren beeinflussen?
 - Wie muss das Grundwasserschutzgebieten um ein Wasserwerk bemessen sein?
 - Wie lange wird es dauern bis die Tagebaurestseen im Lausitzer Braunkohlerevier geflutet sind?

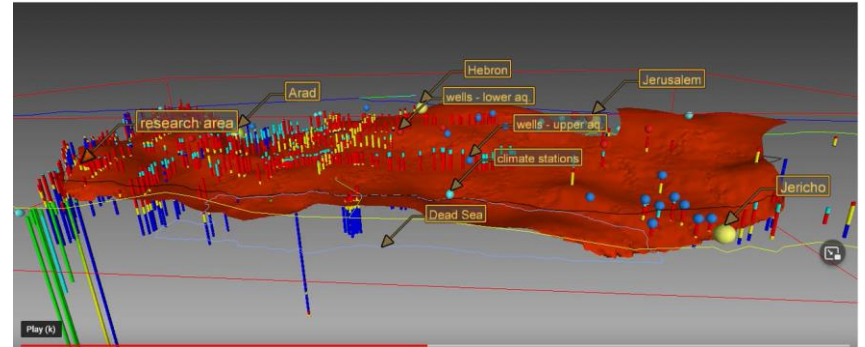


Definition „Modellierung“:
Entwicklung, Formung oder
Herstellung eines Modells.

→ Ein Grundwassermodell ist ein Werkzeug zur quantitativen Beantwortung dieser und weiterer Fragen

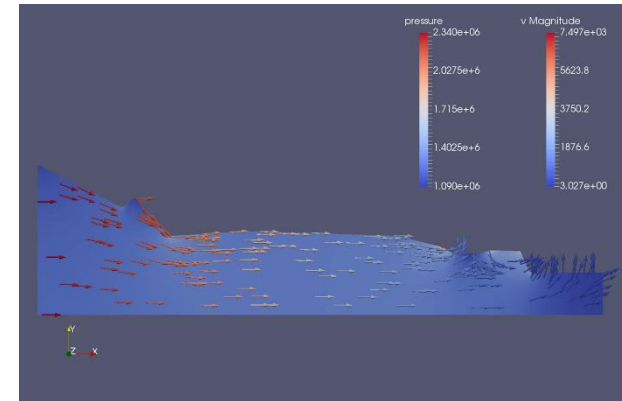
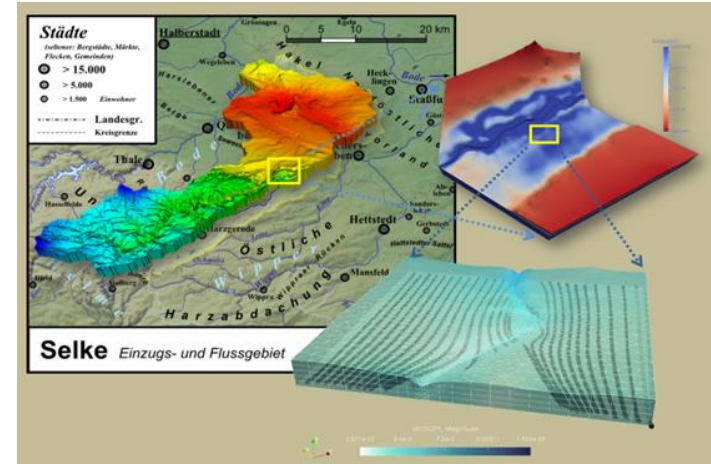
Numerische Grundwassermodelle: Anwendungsbeispiele

- **Western Dead Sea Catchment**
- Die Grundwasserressourcen Israels sind durch die halbtrockenen bis trockenen klimatischen Bedingungen stark begrenzt.
- Die Studie befasst sich mit der Quantifizierung der potenziellen Mengen von Oberflächen- und Grundwasserzuflüssen. Das Untersuchungsgebiet ist durch die unterirdischen Einzugsgebiete begrenzt und hat eine Größe von $\sim 4000 \text{ km}^2$.
- Berechnung der gegenwärtigen und zukünftigen Grundwasserneubildung sowie der Grundwasserressourcen



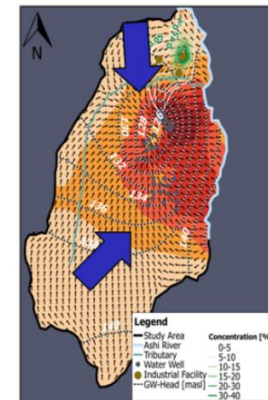
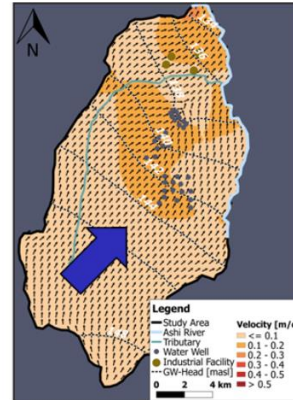
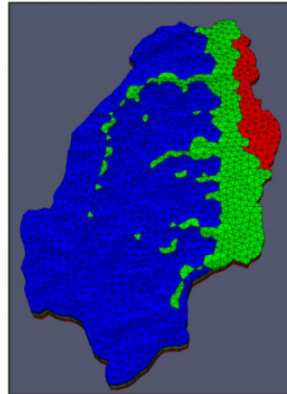
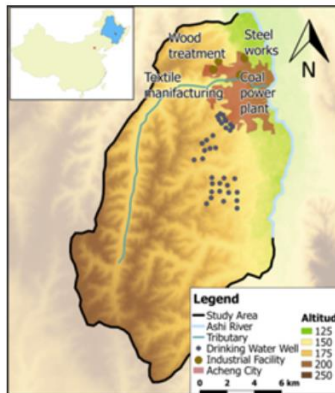
Numerische Grundwassermodelle: Anwendungsbeispiele

- **TERENO: Selke Einzugsgebiet**
- Numerische Modellierungsarbeiten durchgeführt, um Untergrundprozesse auf verschiedenen räumlich-zeitlichen Skalen im Selke-Einzugsgebiet zu untersuchen, insbesondere im Hinblick auf den Nitratumsatz
- 2D und 3D numerische Grundwasserströmungs- und -transportmodelle wurden auf Mäander-, Hanglagen-, Teileinzugs- und Einzugsgebietsebene erstellt und durch Randbedingungen miteinander verbunden.



Numerische Grundwassermodelle: Anwendungsbeispiele

- **Simulation des Schadstofftransports im Songliao Einzugsgebiet**
- Untersuchung des Grundwasserregimes und des unterirdischen Schadstofftransports im Demonstrationsgebiet Ashi City mittels instationärer 3D Simulation
- Die Auswirkungen des künftigen Wasserbedarfs auf die Wasserversorgung wurde bewertet, wobei der Schwerpunkt auf der Ausbreitung von Schadstoffen aus Altlasten und dem Eintrag von Nitrat aus landwirtschaftlichen Aktivitäten lag



Numerische Grundwassermodelle: Anwendungsbeispiele

- **Ausbreitung von Microcystin im Chaoseeaquifer**
- Ein dreidimensionales instationäres Modell des Einzugsgebiets des Chao-Sees quantifiziert den Transport des Algentoxins Microcystin im Untergrund und im Grundwasser.
- Das Absenken des Wasserspiegels des Chao-Sees und die daraus resultierende Änderung der Grundwasserfließrichtung reduziert oder stoppt die Massentransportkomponenten, die weiter aus dem See austreten, die verbleibende Microcystin-Komponente wird schnell reduziert

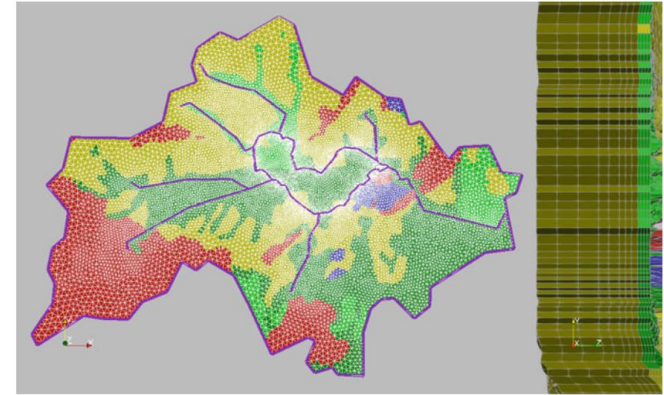


Fig. 7.3 Finite element mesh based on a simplified geometry (left) and a cross-section of a three dimensional mesh (right). Colored according to the finite elements corresponding material group

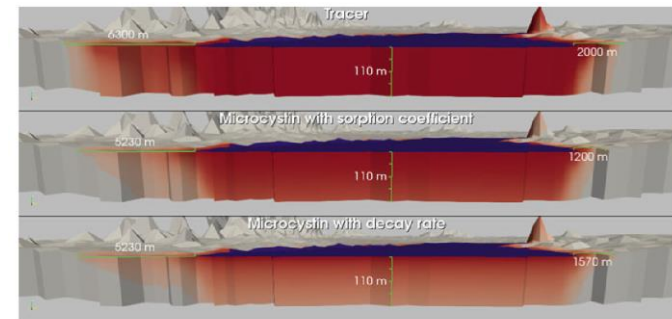
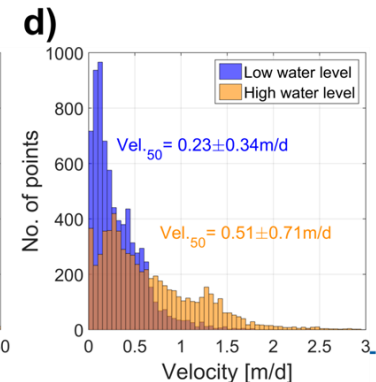
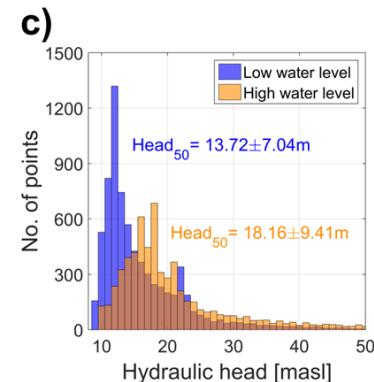
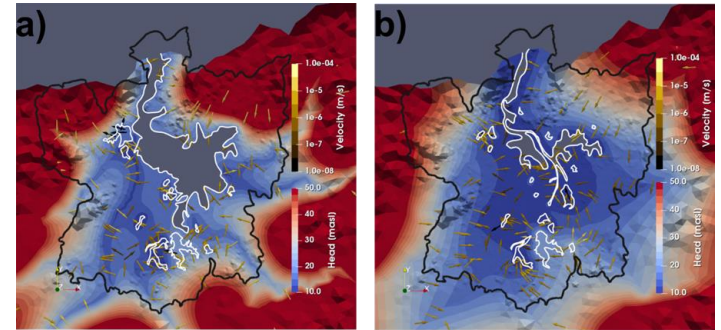


Fig. 7.7 Comparison of the spreading (red colour) of the three mass transport components by means of a cross section at 1120 days

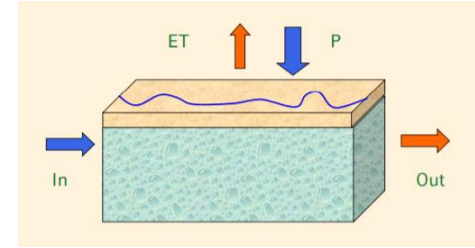
Numerische Grundwassermodelle: Anwendungsbeispiele

- **See-Feuchtgebiet Wasseraustausch im Poyang See Einzugsgebiet, China**
- Ziel des Projekts war die Erforschung der interaktiven Mechanismen von Landnutzungen und Wasserstandsänderungen auf die Veränderung der Wasserressourcen
- Ein flächenhaftes 2D numerisches Grundwassermodell wurde erstellt zur Simulation des Grundwasserfließverhaltens während Trocken- und der Regenzeit
- Es konnte gezeigt werden, dass sich Grundwasserfließgeschwindigkeiten, Fließpfade sowie Anfangs und Endpunkte signifikant zwischen den Jahreszeiten unterscheiden



Entwicklung /Arten von mathematischen Modellen

$$P + In_{sub} + In_{sur} = Out_{sub} + Out_{sur} + ET + \Delta soil + \Delta gw$$



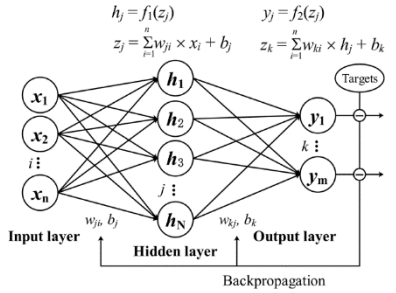
Konzeptionelles Modell

Mathematisches Modell

Black-Box Modelle
Nutzen empirische/statische Zusammenhänge zwischen Variablen

Prozessbasierte Modelle
Nutzen die physikalischen Grundgleichungen

$$(\phi\beta_f + \beta_m)\rho \frac{\partial P}{\partial t} = \nabla \cdot \left(\rho \frac{k}{\mu} \nabla (P + \rho gz) \right)$$



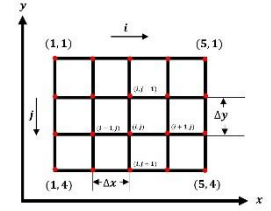
$$h_j = f_1(z_j) \quad y_j = f_2(z_j)$$

$$z_j = \sum_{i=1}^n w_{ji} \times x_i + b_j \quad z_k = \sum_{i=1}^n w_{ki} \times h_j + b_k$$

Analytisch
Vereinfachte Gleichungen ermöglichen formale direkte Lösung

Numerisch
Approximierte (diskretisierte) Gleichungen resultieren in einer Matrixgleichung, die iterativ gelöst werden kann

$$u_{i,j}^{n+1} = u_{i,j}^n + \frac{K_{ij}^x \Delta t}{S_{ij} \Delta x^2} u_{i+1,j}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i-1,j}^n + \frac{K_{ij}^y \Delta t}{S_{ij} \Delta y^2} u_{i,j+1}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i,j-1}^n + \frac{Q_{i,j}}{S_{ij}}$$

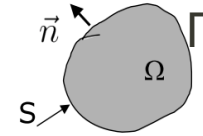


$$Q = 2\pi \cdot k_f \cdot M \cdot \frac{h_2 - h_1}{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}$$

Erhaltungsgesetze

- **Numerischen Grundwassermodelle** basieren auf der **Zerlegung** eines Systems in Teilgebiete und der Aufstellung von **Bilanzgleichungen** (partielle Differentialgleichungen) für jedes Gebiet

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} S(x, t) dx = - \int_{\Gamma} \langle J(x, t) | n(x) \rangle d\sigma + \int_{\Omega} Q(x, t) dx,$$

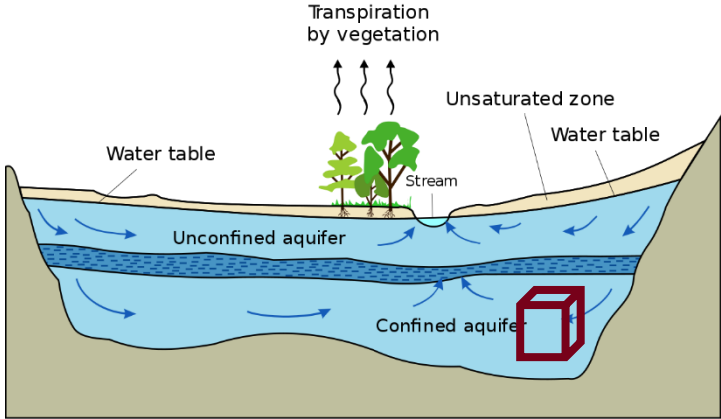






In Worten: $\left\{ \begin{array}{l} \text{Akkumulations} \\ \text{rate für } S \text{ in } \Omega \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Fluss von } J \text{ in } \Omega \\ \text{durch die} \\ \text{Oberfläche } \Gamma \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{l} \text{Quellen und} \\ \text{Senken in } \Omega \end{array} \right\}$

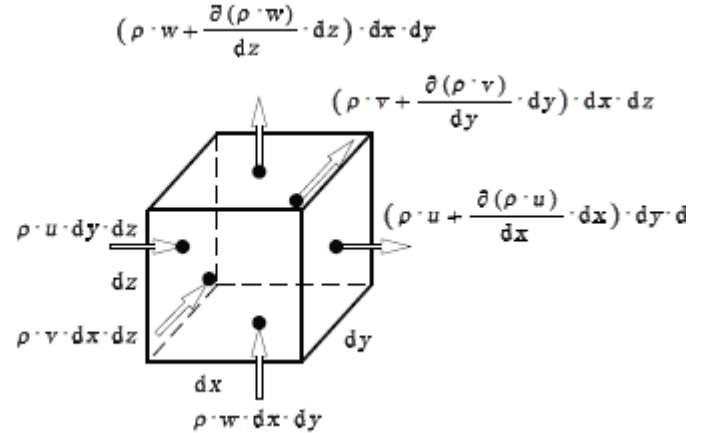
Die Kontinuitätsgleichung kann mit dem Gaußschen Integralsatz hergeleitet werden:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}[\rho v] - Q_m = 0 \quad \text{mit} \quad S = \rho(x, t, p, X, T)$$

Massenerhaltungsgesetz für ein Kontrollvolumen



-  High hydraulic-conductivity aquifer
-  Low hydraulic-conductivity confining unit
-  Very low hydraulic-conductivity bedrock
-  Direction of ground-water flow

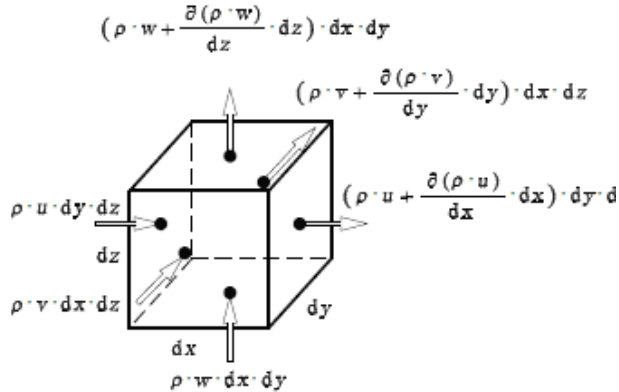


$$\vec{v} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ z \end{pmatrix}$$

<https://tinyurl.com/veafz3ch>

Massenerhaltungsgesetz für ein Kontrollvolumen

Änderung der Masse in einem Volumenelement über die Zeit = Σ des einströmenden Massenstroms in das Volumenelement - Σ des ausströmenden Massenstroms aus dem Volumenelement



links: $\dot{m} = \rho \cdot u \cdot dy \cdot dz$

Taylor Reihe

rechts: $\dot{m} = \left(\rho \cdot u + \frac{\partial(\rho \cdot u)}{\partial x} \cdot dx \right) \cdot dy \cdot dz$

Schauen wir uns das ganze Element mit den Kantenlängen dx, dy and dz and dem Volumen $dV = dx \cdot dy \cdot dz$ an

Massenbilanz in einem Kontrollvolumen

- mathematischen Ausdruck für die zeitliche Änderung der Masse im Volumenelement

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} \cdot dx \cdot dy \cdot dz = \left(\rho \cdot u - \left(\rho \cdot u + \frac{\partial(\rho \cdot u)}{\partial x} \cdot dx \right) \right) \cdot dy \cdot dz +$$
$$\left(\rho \cdot v - \left(\rho \cdot v + \frac{\partial(\rho \cdot v)}{\partial y} \cdot dy \right) \right) \cdot dx \cdot dz +$$
$$\left(\rho \cdot w - \left(\rho \cdot w + \frac{\partial(\rho \cdot w)}{\partial z} \cdot dz \right) \right) \cdot dx \cdot dy$$

- Resultiert in:
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \cdot u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho \cdot v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho \cdot w)}{\partial z} = 0$$

- Umschreiben und Quellterme:
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}[\rho \mathbf{v}] - Q_m = 0$$

Druckbasierte Gleichung

$$(1) \quad \frac{\partial \rho_f}{\partial t} + \operatorname{div}[\rho_f \mathbf{v}] - Q_m = 0$$

$$(2) \quad \frac{\partial(\phi \rho_f)}{\partial t} + \operatorname{div}[\phi \rho_f \mathbf{v}_f] - Q_m = 0$$

- Anwendung der Ketten- und Produktregel auf den ersten Term:

$$(3) \quad \frac{\partial(\phi \rho_f)}{\partial t} = \left(\rho_f \frac{\partial \phi}{\partial p} + \phi \frac{\partial \rho_f}{\partial p} \right) \frac{\partial p}{\partial t}$$

Massenänderungsrate durch Porenraumveränderung

Dichteänderung des Wassers

- Wie definieren wir die Druckabhängigkeiten
- Wie hängt die Geschwindigkeit vom Druck ab?
- Welche Geschwindigkeit meinen wir hier? ~~Relativ-Fluid~~
- Wie ist die Eigenschaften des Korngerüsts und der Körner zu betrachten? → Nur der Porenraumanteil ϕ

$$\mathbf{v} = \mathbf{q} = \phi \mathbf{v}_f$$

Druckbasierte Gleichung

- (3) in (2)

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial p} + \frac{\phi}{\rho_f} \frac{\partial \rho_f}{\partial p} \right) \frac{\partial p}{\partial t} + \operatorname{div}[\phi \mathbf{v}_f] - \frac{Q_m}{\rho_f} = 0$$

- Der Term in den Klammern wird (in der oberflächennahen Hydrogeologie) oft als Summe zweier Konstanten, der Matrixkompressibilität und der Fluidkompressibilität, gesehen:

$$\left((1 - \phi)\beta_m + \phi\beta_f \right) \frac{\partial p}{\partial t} + \operatorname{div}[\phi \mathbf{v}_f] - \frac{Q_m}{\rho_f} = 0$$



$$\beta_m = (1 - \phi)^{-1} \delta\phi / \delta p$$

$$\beta_f = \rho_f^{-1} \delta\rho_f / \delta p.$$

Rocks	Porosity (%)
Fractured basalt	0.05 - 0.50
Karst limestone	0.05 - 0.50
Sandstone	0.05 - 0.30
Limestone, dolomite	0.00 - 0.20
Shale	0.00 - 0.10
Fractured crystalline rock	0.00 - 0.10
Dense crystalline rock	0.00 - 0.05
Unconsolidated Deposits	
Gravel	0.25 - 0.40
Sand	0.25 - 0.50
Silt	0.35 - 0.50
Clay	0.40 - 0.70

From groundwatergeek.com

Druckbasierte Gleichung

$$\left((1 - \phi)\beta_m + \phi\beta_f \right) \frac{\partial p}{\partial t} + \operatorname{div}[\phi v_f] - \frac{Q_m}{\rho_f} = 0$$

- Der Term in den Klammern ist gleich dem Speicherkoeffizienten geteilt durch die Fluidichte und die Erdbeschleunigung, die zu einer neuen Konstante S' zusammengefasst werden kann:

$$S' \frac{\partial p}{\partial t} + \operatorname{div}[\phi v_f] - Q_V = 0$$

- Schließlich können wir das Darcy-Gesetz anwenden:

$$\phi(v_f - v_s) = -\frac{\kappa}{\mu} \nabla (p + \rho_f g z)$$

$$\Psi = p + \rho_f g z$$

Druckbasierte Gleichung

- Mit $v_s=0$ erhalten wir:

$$\hat{S} \frac{\partial p}{\partial t} - \operatorname{div} \left[\frac{\kappa}{\mu} \operatorname{grad}(p + \rho_f g z) \right] - Q_v = 0$$

- Zwei Fluideigenschaften ρ_f , die Fluidichte und μ , die dynamische Viskosität
- κ ist die intrinsische Permeabilität des porösen Mediums
- \hat{S} ist der zuvor eingeführte Speicherterm
- Die einzelnen Terme können Funktionen von Raum und Zeit sein
- Die druckbasierten Grundwassergleichung können für die numerische Modellierung unter hinzuziehen von Rand- und Anfangsbedingungen (**nächster Vorlesungsblock**) genutzt werden

Potentialbasierte Form

▪ Hydraulisches Potential: $H = \frac{p}{\rho_f g} + z$

▪ Hydraulische Leitfähigkeit: $K = \frac{\kappa g \rho_f}{\mu}$

▪ Spezifische Speicherkoeffizient $S_S = \hat{S} g \rho_f$

- Potential-basierte Form für Strömung durch ein anisotropes gesättigtes poröses Medium:

$$S_S \frac{\partial H}{\partial t} - \operatorname{div}[K \operatorname{grad} H] - Q_V = 0$$

Speicherkoeffizient

$$S_s \frac{\partial H}{\partial t} - \operatorname{div}[K \operatorname{grad} H] - Q_V = 0$$

- In transienten Simulationen beschreibt der **spezifische Speicherkoeffizient** die Aufnahme/Abgabe von Wasser aus dem Speicher eines porösen Mediums

- Der **spezifische Speicherkoeffizient** (S_s ; dimension[L-1]) entspricht dem Volumen an Wasser, das aus dem Speicher abgegeben wird pro Einheitsvolumen Grundwasserleiter und pro Einheitsabnahme im Potential.

$$S_s = \frac{-\Delta V_W}{V \Delta h}$$

- In **gespannten** Aquifern ermöglicht Kompression (Wasser+Matrix) den Wasseraustausch, in **ungespannten** Aquifern durch Entwässerung der Poren $\rightarrow S_{\text{ungespannt}} \gg S_{\text{gespannt}}$

- Speicherkoeffizienten: $S = S_s * M + S_y$

- S_y : Speicheranteil durch Entwässerung der Poren (ungespannter Aquifer)

Table 4 Values of specific storage for given values of aquifer compressibility assuming porosity equal to 15 % (After Younger, 1993)

Typical Lithologies	Aquifer Compressibility (ms ² /kg)	Specific Storage (m ³)
Clay	10 ⁶	9.81x10 ³
Silt, fine sand	10 ⁷	9.82x10 ⁴
Medium sand, fine gravel	10 ⁸	9.87x10 ⁵
Coarse sand, medium gravel, highly fissured rock	10 ⁹	1.05x10 ⁶
Coarse gravel, moderately fissured rock	10 ¹⁰	1.63x10 ⁶
Unfissured rock	10 ¹¹	7.46x10 ⁷

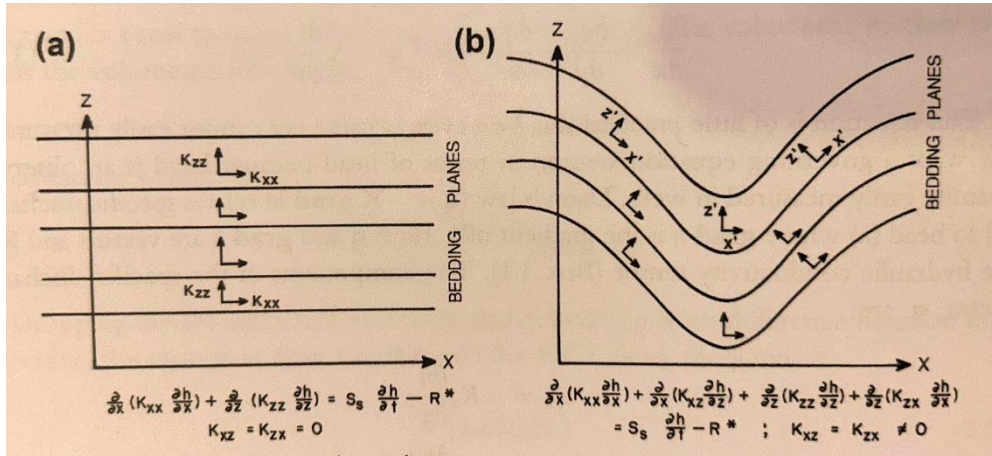
gespannt

Values of specific yield, from Johnson (1967)

Material	Specific Yield (%)		
	min	avg	max
<i>Unconsolidated deposits</i>			
Clay	0	2	5
Sandy clay (mud)	3	7	12
Silt	3	18	19
Fine sand	10	21	28
Medium sand	15	26	32
Coarse sand	20	27	35
Gravelly sand	20	25	35
Fine gravel	21	25	35
Medium gravel	13	23	26
Coarse gravel	12	22	26

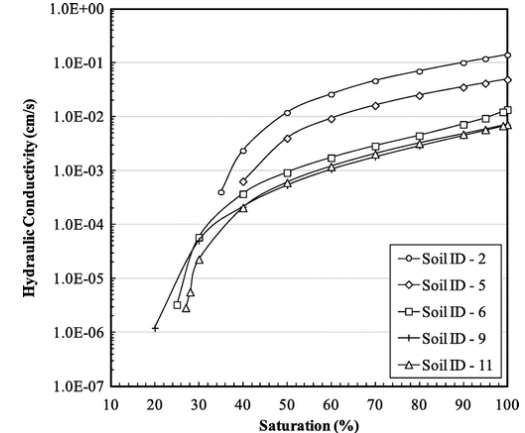
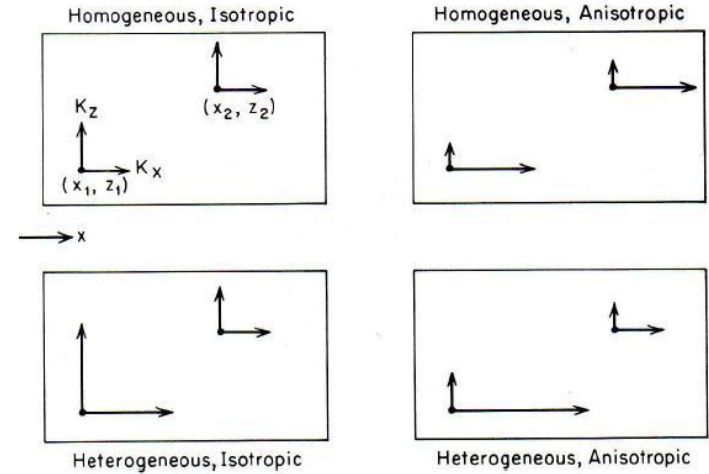
ungespannt

Hydraulische Leitfähigkeit



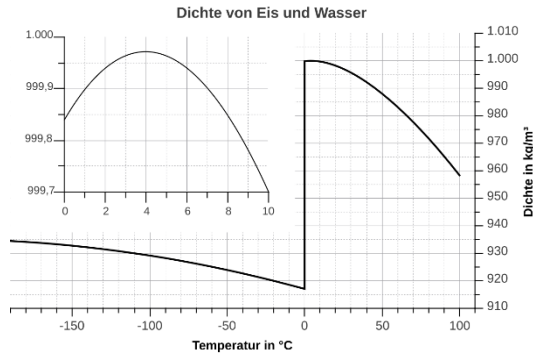
- Hydraulische Leitfähigkeit ist ein Tensor und abhängig von Strömungsrichtung, Aquifertyp und Sättigung
- Für isotrope, homogene Bedingungen gilt:

$$S_s \frac{\partial H}{\partial t} - K \Delta H - Q_V = 0$$

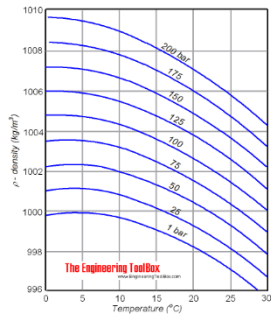


<https://tinyurl.com/k4pz8m86>

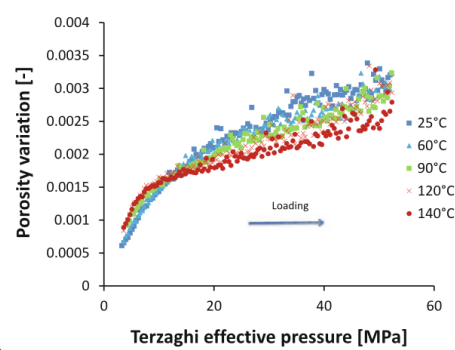
Druck und Temperaturabhängigkeiten



Temperaturabhängigkeit der Wasserdichte
(Wikipedia)



Druckabhängigkeit der Wasserdichte



Druckabhängigkeit der Porosität in Sandstein (Hassan et al, 2014)

Table 1
Porosity Models in Select GSFs

GSF code	Porosity model	Matrix compressibility
FEHM (Zyvoloski et al, 2011)	$\phi = \phi_0 + \beta_m (P - P_0)$	$\beta_m = d\phi / dP$
PFLOTTRAN (Lichtner et al, 2015)	$\phi = 1 - (1 - \phi_0) e^{-\beta_m (P - P_0)}$	$\beta_m = (1 - \phi)^{-1} (d\phi / dP)$
STOMP ^a (White & Oostrom, 2000)	$\phi = 1 - (1 - \phi_0) e^{-\beta_m (P - P_0)}$	$\beta_m = (1 - \phi)^{-1} (d\phi / dP)$
ECLIPSE ^b (Espelund, 2015; Pettersen, 2006)	$\phi = \phi_0 e^{\beta_m (P - P_0)}$	$\beta_m = d\phi / dP$
BOAST ^c (Fanchi et al, 1982)	$\phi = \phi_0 e^{\beta_m (P - P_0)}$	$\beta_m = \phi^{-1} (d\phi / dP)$
TOUGH2 ^{b,d} (Pruess et al, 1999)	$\phi = \phi_0 e^{\beta_m (P - P_0)}$	$\beta_m = \phi^{-1} (d\phi / dP)$

^aCompressibility is calculated from specific storage.
^bPorosity model is available, but it is unclear if it is the default.
^cBOAST has β_m as part of the total compressibility.
^dAssumes isothermal conditions.

Implementation im Code (Birdsell et al, 2014)

Vertical, drained compressibilities^[5]

Material	β (m ² /N or Pa ⁻¹)
Plastic clay	$2 \times 10^{-6} - 2.6 \times 10^{-7}$
Stiff clay	$2.6 \times 10^{-7} - 1.3 \times 10^{-7}$
Medium-hard clay	$1.3 \times 10^{-7} - 6.9 \times 10^{-8}$
Loose sand	$1 \times 10^{-7} - 5.2 \times 10^{-8}$
Dense sand	$2 \times 10^{-8} - 1.3 \times 10^{-8}$
Dense, sandy gravel	$1 \times 10^{-8} - 5.2 \times 10^{-9}$
Ethyl alcohol ^[6]	1.1×10^{-9}
Carbon disulfide ^[6]	9.3×10^{-10}
Rock, fissured	$6.9 \times 10^{-10} - 3.3 \times 10^{-10}$
Water at 25 °C (undrained) ^[7]	4.6×10^{-10}
Rock, sound	$< 3.3 \times 10^{-10}$
Glycerine ^[6]	2.1×10^{-10}
Mercury ^[6]	3.7×10^{-11}

Analytische Modelle und Numerische Modelle

Analytische Modelle	Numerische Modelle
Geringe Rechenzeiten	Iterative Lösungen einer Gleichungsmatrix erfordert höhere Rechenzeiten
Kontinuierlich in Raum und Zeit	Diskret in Raum und Zeit
Benötigen simple Systemgeometrien und Randbedingungen	Lösung transienter, heterogener 3D Systeme mit komplexen Randbedingungen
Einfache Analytische Lösungen sind per Hand lösbar/ komplexere benötigen Computerprogramme	Fast immer Nutzung von Spezialsoftware



Analytische Lösungsverfahren mit komplexen Geometrien und Randbedingungen sind möglich für lineare Systeme → Analytic Element Method

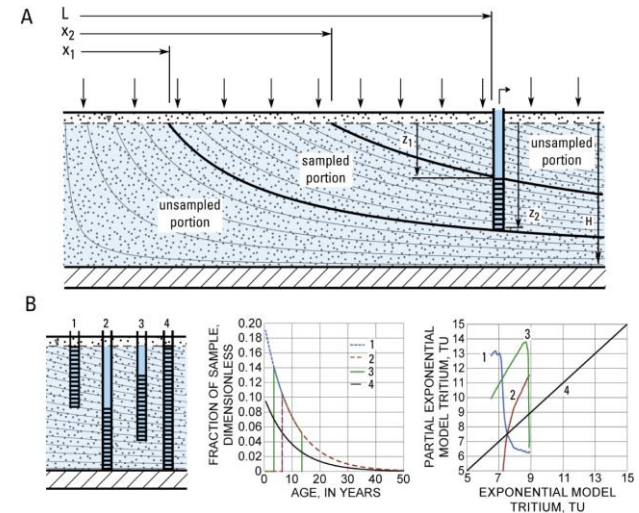
Analytische Lösungen

- Benchmarking von numerischen mathematischen Modellen
- Vermeidung unnötiger Komplexität (Transient, 3D, etc)
- Abschätzung Parametersensitivitäten und Unsicherheiten
- Schärfen der „Modellierintuition“ (Haitjema, 2006)

A homogeneous aquifer with constant thickness (H), and porosity (ϕ), and uniform recharge rate (r) has the following depth-dependent age relation (Vogel, 1967):

$$T(z) = -\frac{H\phi}{r} \ln\left(\frac{H-z}{H}\right) \quad (3)$$

$$\tau_s = \tau_{aq} = \left(\frac{H\phi}{r}\right)$$



Jurgens et al 2016; Vogel 1967

Analytische Lösungen

- Fennemore and Hantzche (1983)

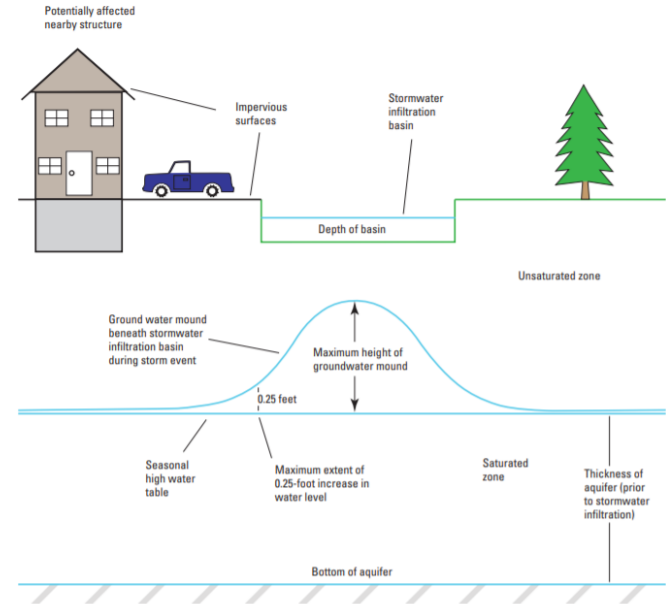
$$z_m = IC \left(\frac{L}{4} \right)^n \left(\frac{1}{K\bar{h}} \right)^{0.5n} \left(\frac{t}{S_y} \right)^{1-0.5n}$$

- Haitjema (1995)

$$\Delta h = \frac{NL^2}{8\bar{T}}$$

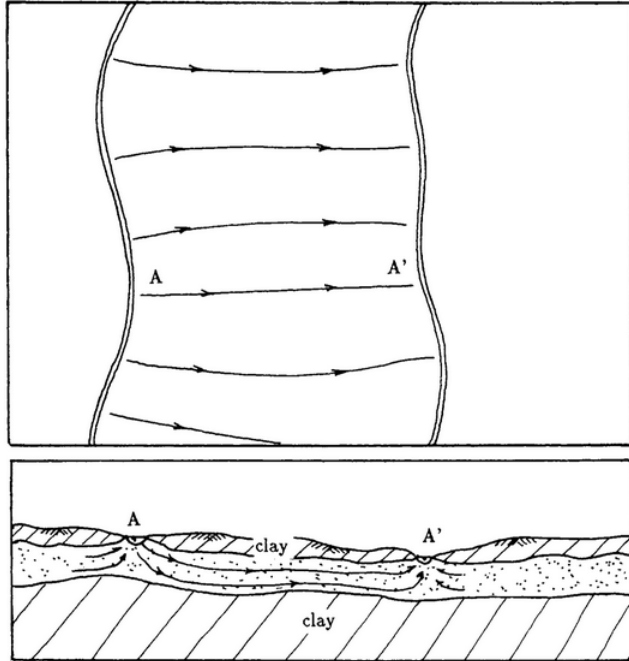
- Erkenntnis für die Modellierung:

- Kalibrierung auf Wasserstände ergibt nur Aussagen über das Verhältnis Neubildung/Transmissivität
- Kalibrierung ist insensitive für hohe Transmissivitäten und im Umfeld von Randbedingungen
- **Viele Weitere “Faustregeln” sind ableitbar!!!**



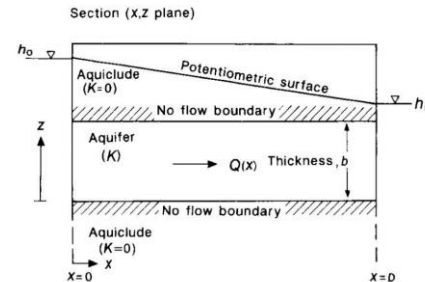
Grundwasserhügel

Einfache Lösungen, Beispiel

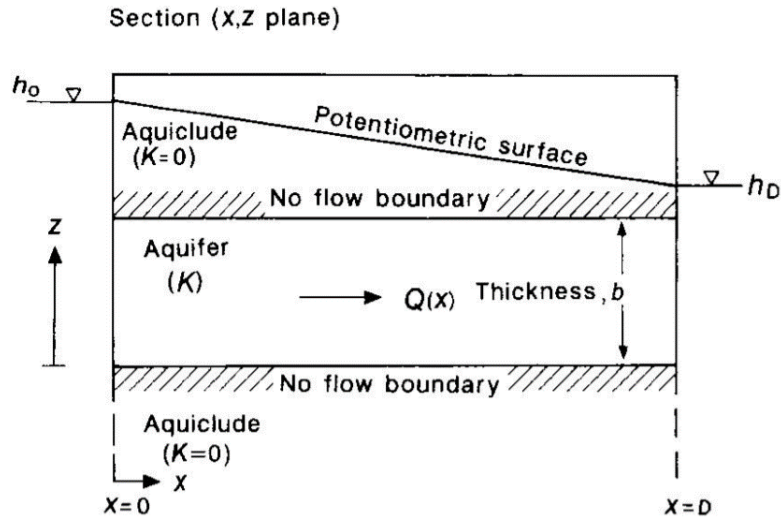


Hajtema et al, 2006

- Grundwasserströmung zwischen zwei grossen Flüssen in Kontakt mit einem gespannten Aquifer
- Annahme: Die Strömung durch einen Querschnitt repräsentiert das regionale Fließverhalten und es gibt keine vertikalen Gradienten
- Wir integrieren über die Tiefe und erhalten ein 1D Problem



Einfache Lösungen, Beispiel



~~$$S \frac{\partial H}{\partial t} - \text{div}[KM \text{grad } H] - Q_V = 0$$~~

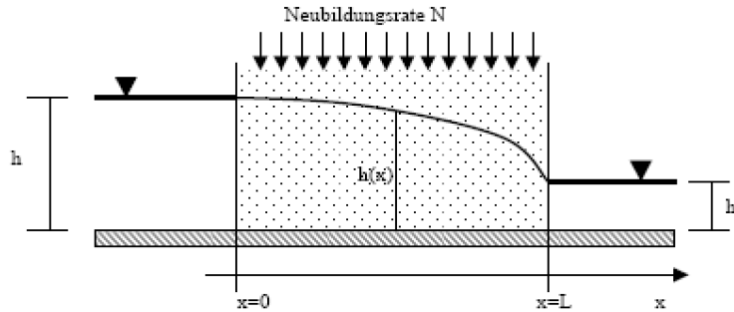


$$H(x) = \frac{h_D - h_0}{D} x + h_0$$

- Aber was ist mit dem spezifischen Durchfluss:

$$q_x = -K \frac{\partial H}{\partial x} = -K \frac{h_D - h_0}{D}$$

Einfache Lösungen, Beispiel



$$H(x = 0) = h_0$$

$$H(x = L) = h_L$$

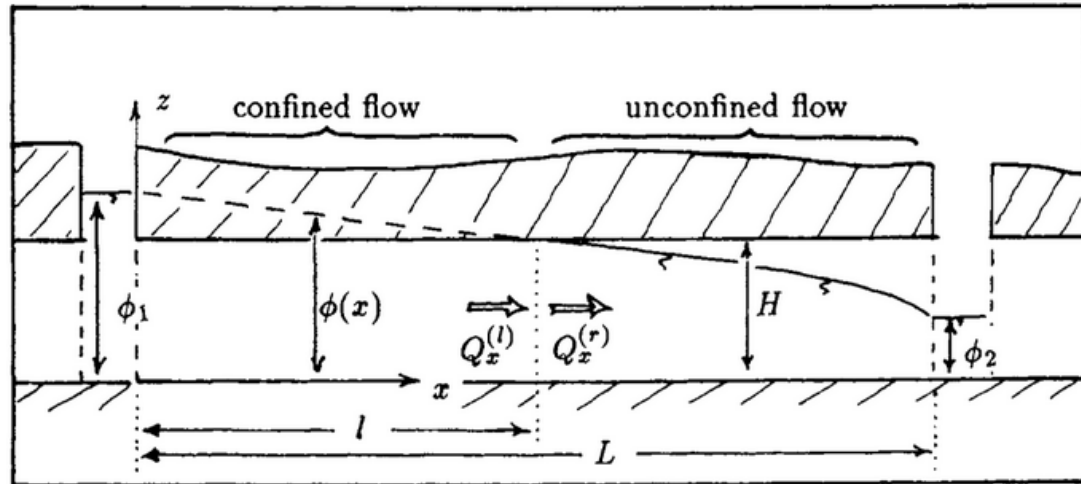
- Ungespannter Aquifer mit Grundwasserneubildung
- Annahmen: Die teilgesättigte Zone ist dünn und hat eine geringe Leitfähigkeit → Vernachlässigbar

$$S_y \frac{\partial H}{\partial t} - \text{div}[KH \text{grad } H] - Q_V = 0$$



$$H^2(x) = \frac{h_L^2 - h_0^2}{L} x + h_0^2 + \frac{N}{K} x(L - x)$$

Einfache Lösungen, Beispiele

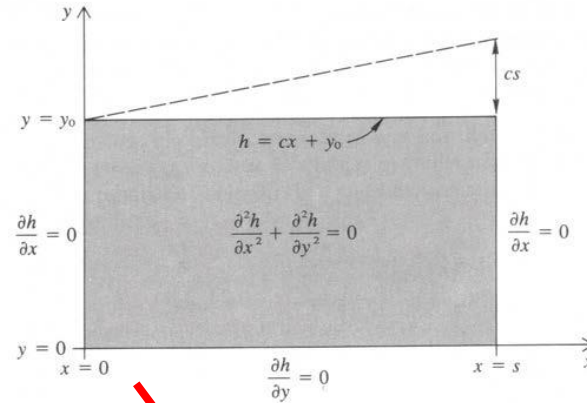
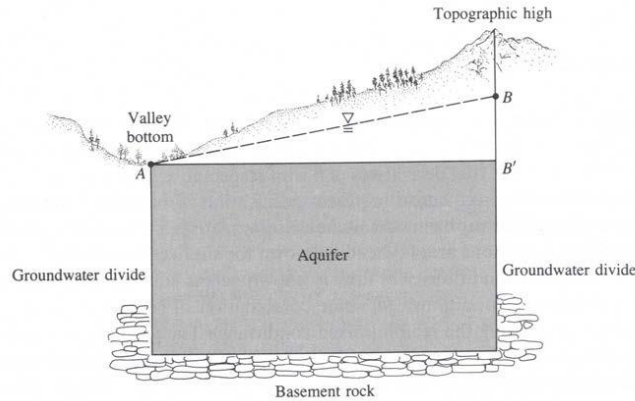


- Mischform:
- Lösung über Massenbilanz am Übergang gespannt/ungespannt

$$l = \frac{2HL(H - \phi_1)}{\phi_2^2 - 2H\phi_1 + H^2}$$

Einfache Lösungen, Beispiel

- Gespannter 2D Aquifer zwischen zwei Wasserscheiden (Toth Strömung)



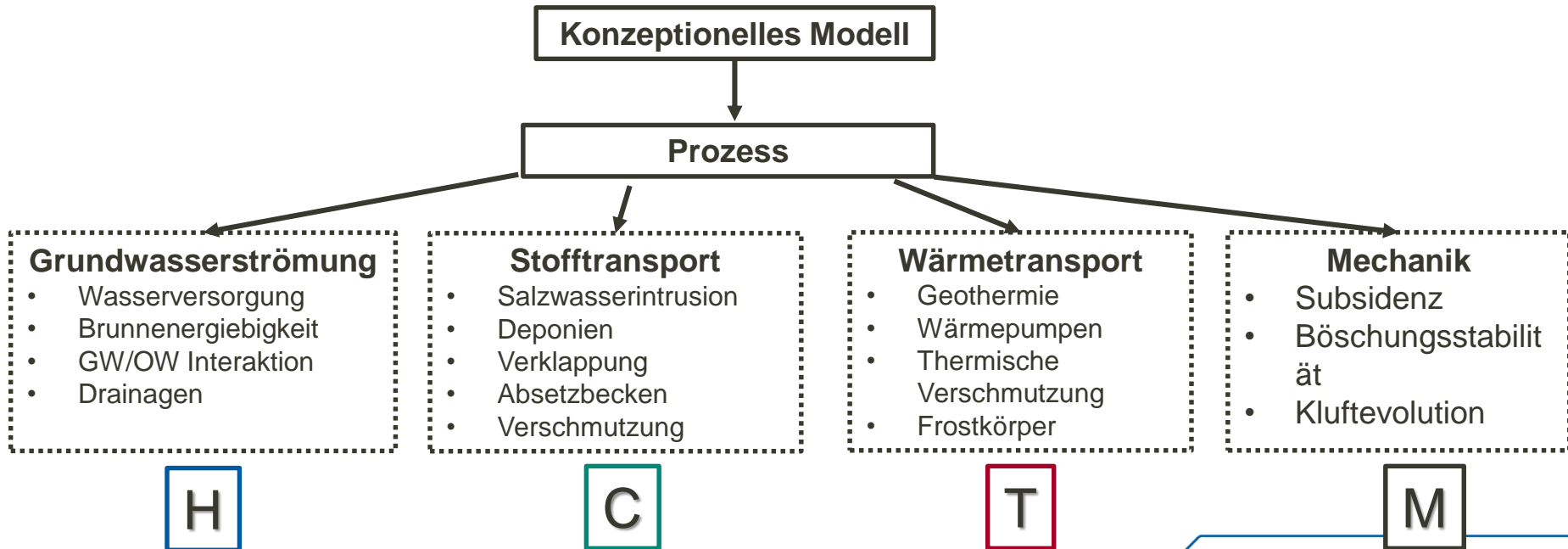
~~$$S_y \frac{\delta H}{\delta t} - \text{div}[KH \text{grad } H] - Q_V = 0$$~~



$$h(x, y) = y_0 + \frac{cs}{2} - \frac{4cs}{\pi^2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\cos[(2m+1)\pi x / s] \cosh[(2m+1)\pi y / s]}{(2m+1)^2 \cosh[(2m+1)\pi y_0 / s]}$$

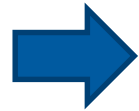
Kategorisierung numerischer Grundwassermodelle: Prozesse

- Welche Prozesse soll das Modell abbilden? Entscheidung ergibt sich aus der Aufstellung des Konzeptionelles Modell:



Modelauswahl: Prozesse II

- Je nach Prozessauswahl ergeben sich verschiedene Zielgrößen und Unterprozesse



Hauptprozess	Abhängige Variable	Anwendungsabhängige Komponenten
Strömung	Fluiddruck, Standrohrspiegelhöhe, Grundwasserflurabstand Sättigung, ...	Poren/Kluft/Karstaquifere Teilsättigung Einphasen/zweiphasen Strömung Ungespannt/gespannte GWL
Wärmetransport	Temperatur, Enthalpie, Innere Energie	Dieselben wie Strömung + Konvektion Wärmeleitung Strahlung
Stofftransport	Konzentration	Dieselben wie Strömung + Konvektion Dispersion Reaktion
Mechanik	Verformung Spannung	Elastische Medien Plastische Medien Viskoelastische Medien

Datenbedarf

- Für den Aufbau eines numerischen Grundwassermodells stehen uns folgende Daten zur Verfügung (Hölting & Coldewey):
 - Geländehöhen, Geologie, Basis und Oberfläche der relevanten Schichten (Grundwasserleiter)
 - Vorflutpotenziale an Oberflächengewässern
 - Flächendifferenzierte hydraulische Parameter wie **Durchlässigkeitsbeiwerte, Speicherkoeffizienten, Porosität**
 - Grundwassergleichen und repräsentative Grundwasserstandsganglinien von Grundwassermessstellen
 - Wechselwirkungen zwischen Oberflächengewässern und Grundwasser (Wasserstände und **Leakagekoeffizienten**)
 - Standorte und Mengen für Entnahmen und Versickerungen
 - Flächendifferenzierte Grundwasserneubildung
 - Niederschlag und Verdunstung auf offenen Wasserflächen

Modellnutzung: Kurz

Präprozessierung

Wir abstrahieren das Problem und diskretisieren in Raum und die Zeit.

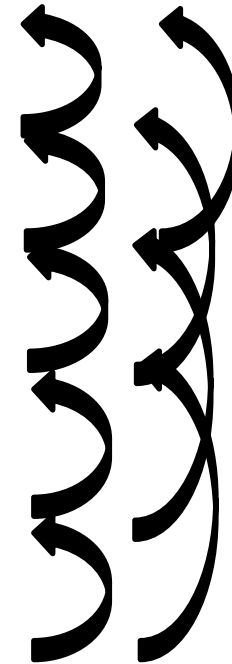
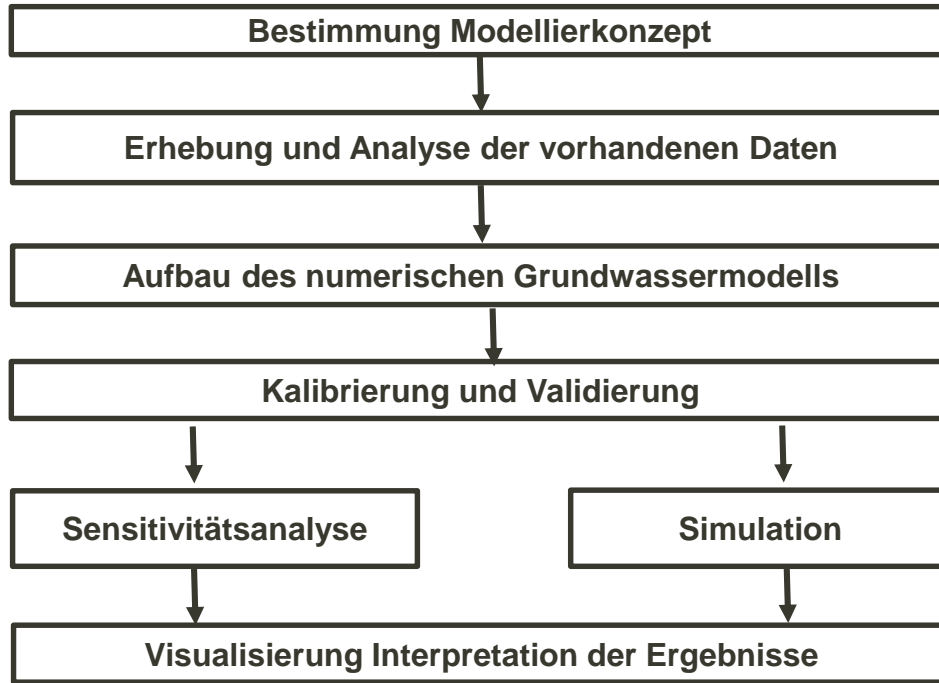
Simulation

Wir bilden den physikalischen Prozess mit mathematischen Methoden nach

Postprozessierung
(Visualization)

Wir interpretieren und analysieren die Simulationsergebnisse

Modellnutzung: Lang



**Numerische
Modellerung ist ein
iterativer Prozess!**