

Modellierung von Hydrosystemen - SoSe 2022

BHYWI-22-B2-T1.1: Hydromechanik und Numerische Methoden

Olaf Kolditz, Lars Bilke, Karsten Rink, Haibing Shao, Erik Nixdorf

¹Helmholtz Centre for Environmental Research – UFZ, Leipzig

²Technische Universität Dresden – TUD, Dresden

³Center for Advanced Water Research – CAWR

⁴TUBAF-UFZ Center for Environmental Geosciences – C-EGS, Freiberg / Leipzig

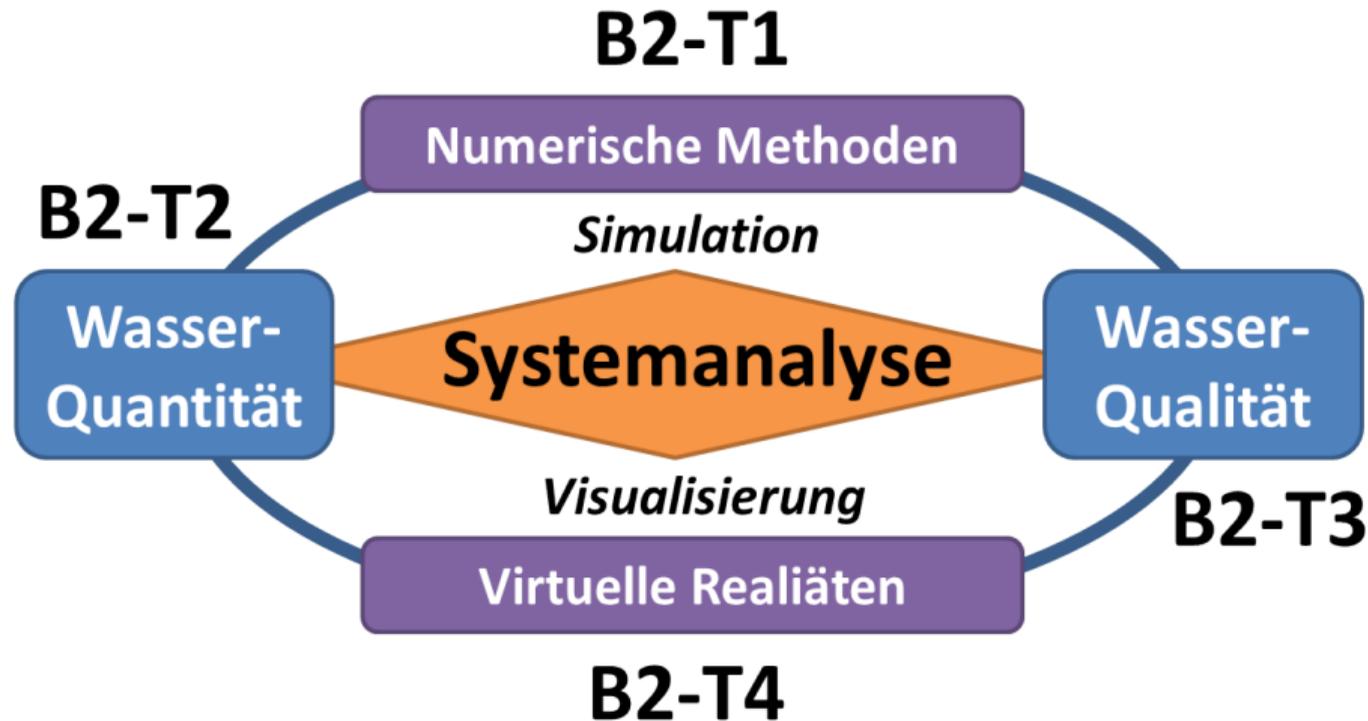
⁴Bundesanstalt für Geowissenschaften und Rohstoffe – BGR, Hannover / Berlin

Dresden, 27.05.2022

Zeitplan: Modellierung von Hydrosystemen: Zweiter Block (B2)

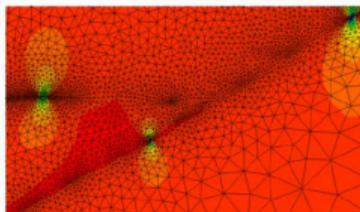
Sommersemester 2022: BHYWI-22-B2

Datum	B2	Thema	Format
27.05.2022	B2-T1.0	Einführung in die Veranstaltung (B2) (Kolditz)	Online
27.05.2022	B2-T1.1	Hydromechanik und Numerische Methoden (Kolditz)	Online
27.05.2022	B2-T1.2	Grundwasserhydraulik und Prinzipbeispiel (Kolditz)	Online
03.06.2022	B2-T3.1	Stofftransport in Hydrosystemen (Shao)	HSZ/403
03.06.2022	B2-T3.2	Stofftransport in Hydrosystemen (Shao)	HSZ/403
10.06.2022	–	Vorlesungsfrei (Pfingsten)	
17.06.2022	B2-T2.1	Regionale Grundwassersysteme (Nixdorf)	HSZ/403
17.06.2022	B2-T2.2	Regionale Grundwassersysteme (Nixdorf)	HSZ/403
17.06.2022	B2-T2.3	Regionale Grundwassersysteme (Nixdorf): Übung	HSZ/403
24.06.2022	B2-T4.1	Virtuelle VISLAB Tour - Vorlesung (Rink/Bilke)	Online
24.06.2022	B2-T4.2	Virtuelle VISLAB Tour - Demo (Rink/Bilke)	Online
01.07.2022	B2-T1.3	Finite-Differenzen-Methode: Explizit (Kolditz)	HSZ/403
01.07.2022	B2-T1.4	Finite-Differenzen-Methode: Implizit (Kolditz)	HSZ/403
01.07.2022	B2-T1.5	Finite-Differenzen-Methode: Übungen (Kolditz)	HSZ/403
08.07.2022	B2-T3.3	Stofftransport in Hydrosystemen (Shao)	GER/38
08.07.2022	B2-T3.4	Stofftransport in Hydrosystemen (Shao)	GER/38
15.07.2022	B2-T1.6	Zusammenfassung der Veranstaltung (Hartmann/Kolditz)	HSZ/403
15.07.2022	B2-T1.7	Vorbereitung Klausur (Hartmann/Kolditz)	HSZ/403



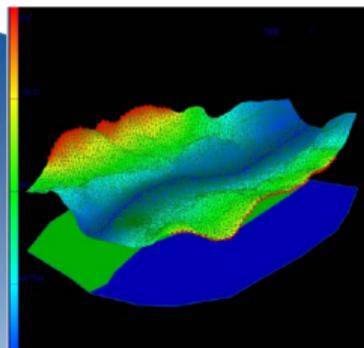
- ▶ Grundlagen (kurze Wiederholung)
- ▶ Grundwassergleichung
- ▶ Prinzip-Beispiel
- ▶ Bilanzierung
- ▶ Berechnungsverfahren
- ▶ Lösung
- ▶ Übung MvH-01: Programmierung für Prinzip-Beispiel

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{\partial\psi}{\partial t} + \mathbf{v}^E \nabla\psi$$

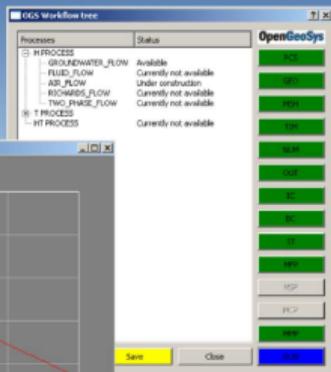


Basics
Mechanik

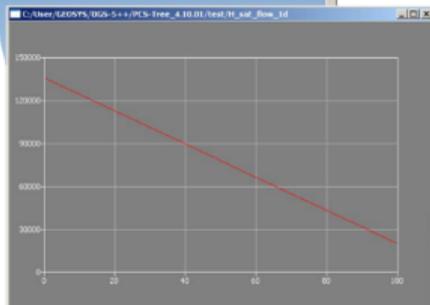
Anwendung



Numerische
Methoden



Programmierung
Visual C++

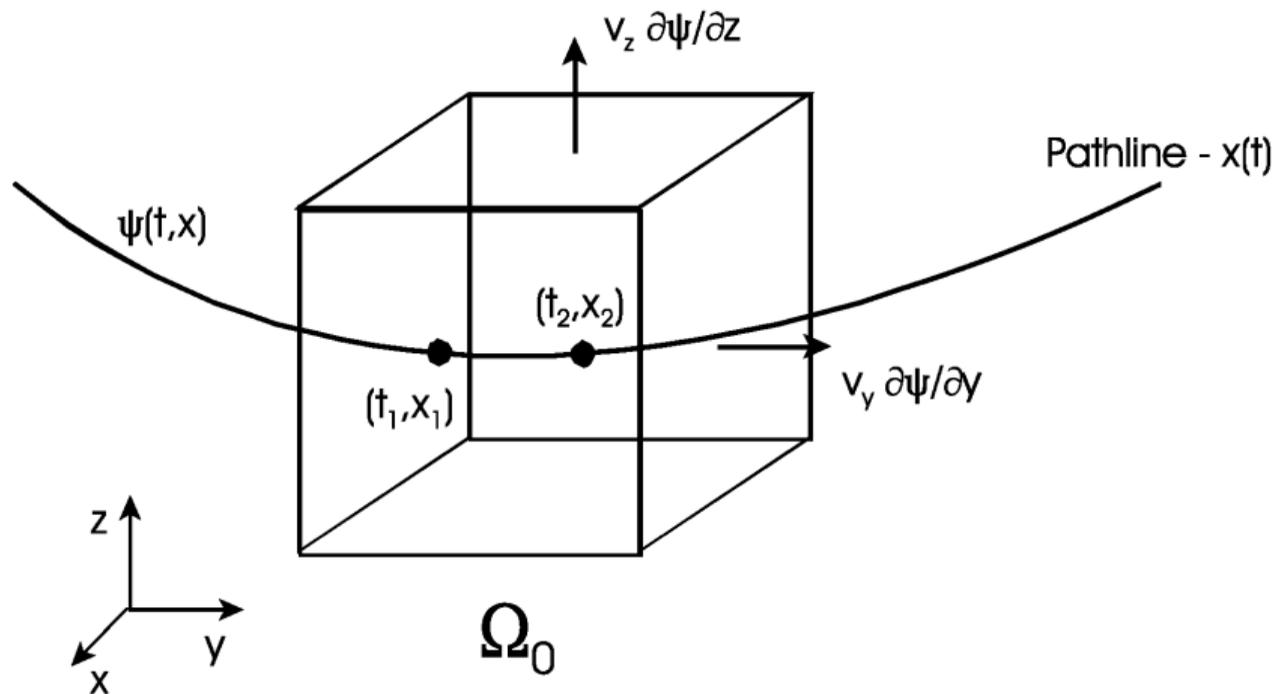


Prozessverständnis

Hydromechanik (recap)

- Euler-Prinzip
- Navier-Stokes-Gleichung und Vereinfachungen
- Grundwassergleichungen
- Darcy-Gleichung für Grundwasserströmung

Das Euler Prinzip (Wdh)



$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \mathbf{f}^e + \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \sigma \quad (1)$$

In index notation the above vector equation is written as

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} &= \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} \right) \\ \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} &= \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} \right) \\ \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} &= g + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad (2)$$

with $u = v_x$, $v = v_y$, $w = v_z$ and $\mathbf{f}^e = \mathbf{g}$.

Flow Equations - Systematic (Wdh)

Stress Tensor

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{1} + \boldsymbol{\tau} \quad (3)$$

Navier-Stokes Equation

$$\boxed{\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \mathbf{f}^e - \frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \mathbf{v}} \quad (4)$$

Euler Equation

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \mathbf{f}^e - \frac{1}{\rho} \nabla p \quad (5)$$

Stokes Equation

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \mathbf{f}^e - \frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \mathbf{v} \quad (6)$$

Darcy Equations

$$0 = \mathbf{f}^e - \frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \mathbf{v} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{q} = n\mathbf{v} = -\frac{\mathbf{k}}{\mu} (\nabla p - \rho \mathbf{g}) \quad (7)$$

$$\frac{\partial n\rho}{\partial t} + \nabla \cdot (n\rho\mathbf{v}) = Q_\rho \quad (8)$$

Für ein inkompressibles Fluid gilt dann (PF)

$$\rho \frac{\partial n}{\partial t} + \rho \nabla \cdot (n\mathbf{v}) = Q_\rho \quad (9)$$

oder noch besser

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot (n\mathbf{v}) = \frac{Q_\rho}{\rho_0} \quad (10)$$

In der Grundwasserhydraulik gilt

$$\frac{\partial n}{\partial t} = S \frac{\partial h}{\partial t} \quad (11)$$

$$n\mathbf{v} = \mathbf{q} = -\mathbf{K}\nabla h \quad (\text{Darcy Gesetz}) \quad (12)$$

Dabei sind: S der Speicherkoeffizient, h die Piezometer- oder hydraulische Höhe, \mathbf{q} die Darcy- oder Filtergeschwindigkeit und \mathbf{K} der hydraulische Leitfähigkeitstensor.

$$\mathbf{K} = \mathbf{k} \frac{\rho \mathbf{g}}{\mu} = \mathbf{k} \frac{\mathbf{g}}{\nu} \quad (13)$$

$$\mathbf{q} = n\mathbf{v} = -\frac{\mathbf{k}}{\mu} (\nabla p - \rho \mathbf{g}) = -\mathbf{K} \nabla h \quad (14)$$

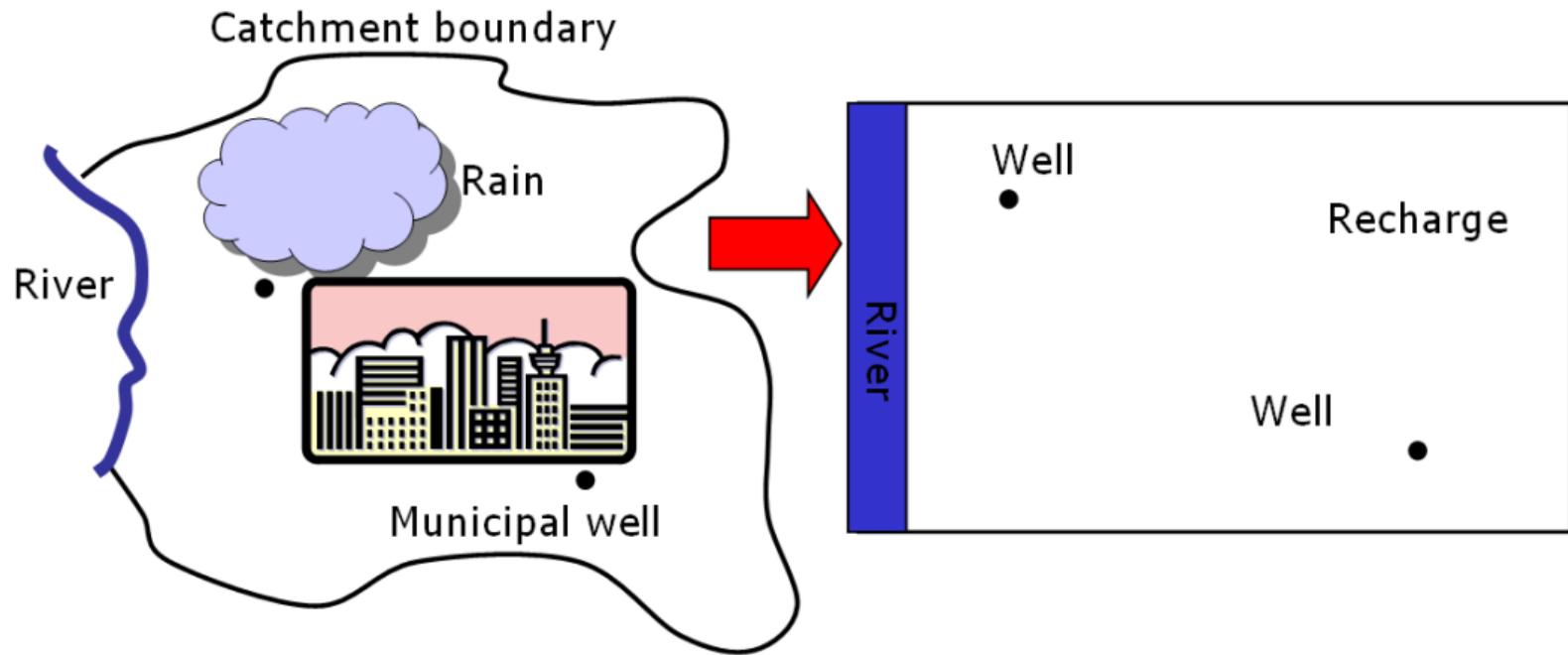
\mathbf{k} ist hydraulische Permeabilitätstensor.

$$\begin{aligned} S \frac{\partial h}{\partial t} + \nabla \cdot (n\mathbf{v}) &= Q \\ S \frac{\partial h}{\partial t} - \nabla \cdot (\mathbf{K}\nabla h) &= Q \\ S \frac{\partial h}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left(K_x \frac{\partial h}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(K_y \frac{\partial h}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(K_z \frac{\partial h}{\partial z} \right) &= Q \end{aligned}$$

Wir begnügen uns mit einem 2-D horizontalen Modell.

$$S \frac{\partial h}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left(K_x \frac{\partial h}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(K_y \frac{\partial h}{\partial y} \right) = Q \quad (15)$$

Prinzip-Beispiel

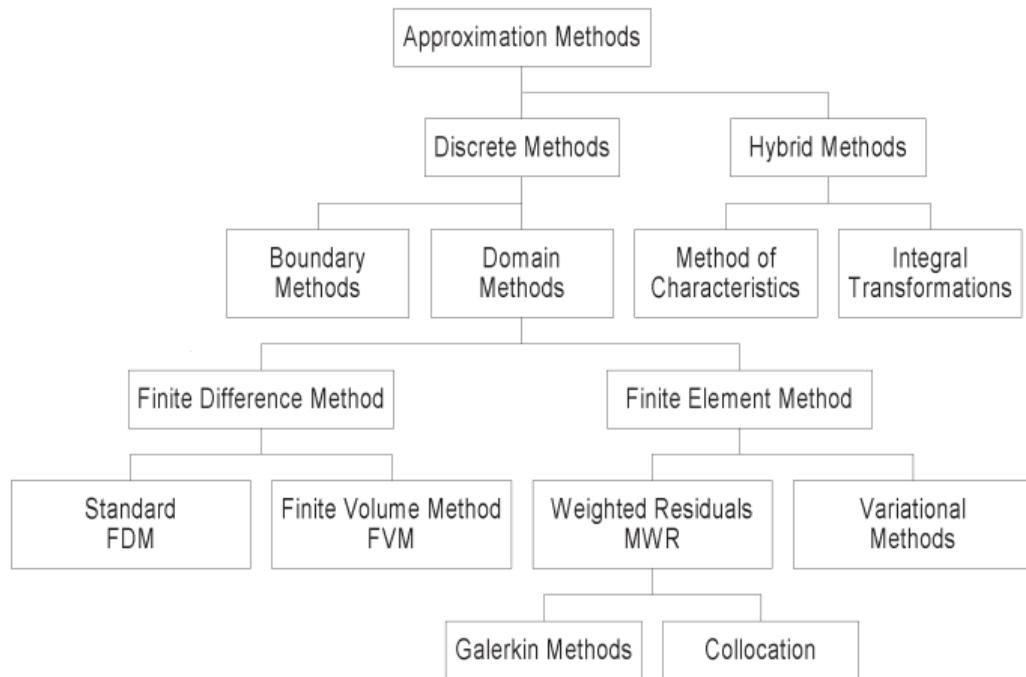


Quelle: Sebastian Bauer (Uni Kiel)

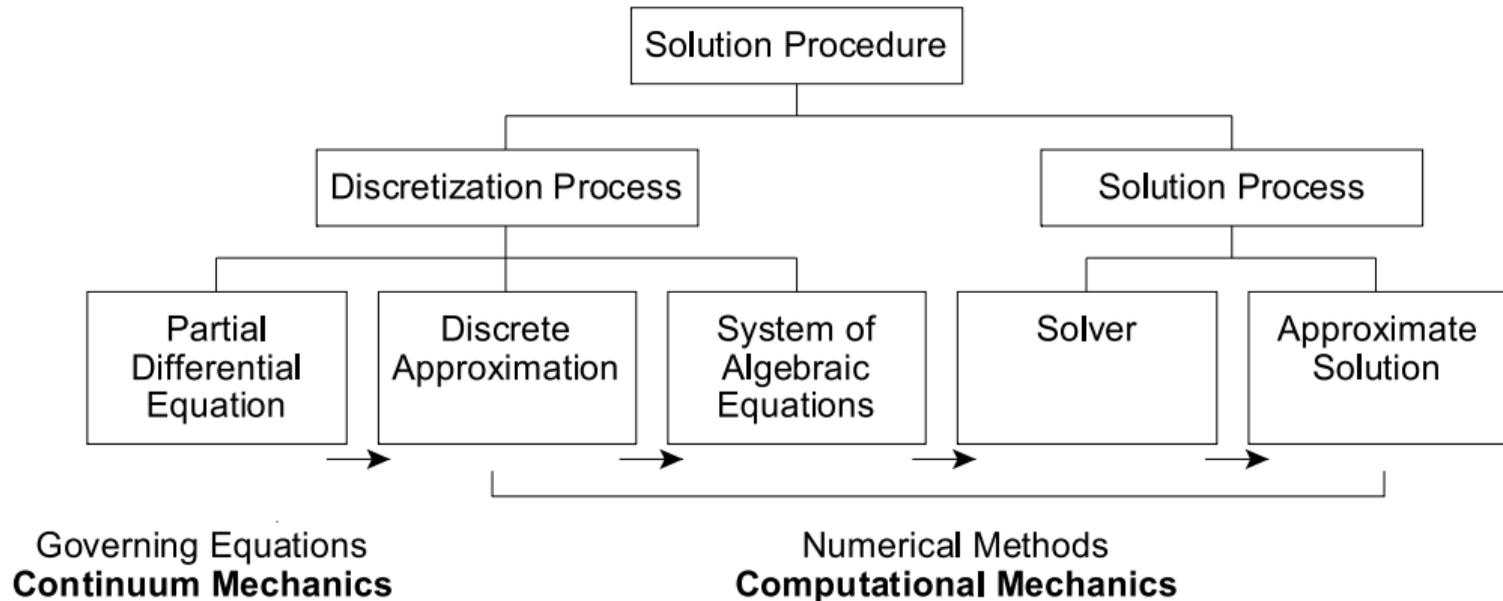
Numerische Methoden (recap)

- Näherungsverfahren
- Lösungsverfahren
- Übersicht: Beispiele

Näherungsverfahren (recap Hydroinformatik II)



Lösungsverfahren (recap Hydroinformatik II)



Mechanik (Physik) $\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \psi d\Omega = \int_{\Omega} \frac{\partial \psi}{\partial t} d\Omega + \int_{\partial \Omega} \nabla \cdot \Phi d\Omega = \int_{\Omega} q^{\psi} d\Omega$

↓
 Mathematik (PDE) $\frac{\partial \psi}{\partial t} + \nabla \cdot \Phi^{\psi} = q^{\psi}$ 1D: $\frac{\partial \psi}{\partial t} + v_x \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \left(D_{xx} \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) = q^{\psi}$ $\psi(t, x)$
 $\nabla \psi - D^{\psi} \nabla \psi$ $\frac{\partial}{\partial x} \left(D_{xx} \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) = 0$ $\psi(x)$

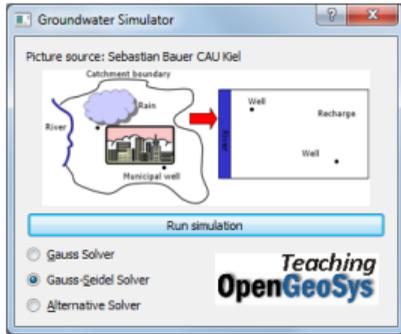
Lösungen (analytisch) → Heterogenität
 → stationär $q^{\psi}(t)$
 → Nichtlinearität $D^{\psi}(\psi)$

↓
 Numerische Verfahren $\frac{d^2 \psi}{dx^2} = 0$ $\psi^{(x)} = ax + b$
 $\frac{d\psi}{dx} = a$ $\frac{d^2 \psi}{dx^2} = 0$

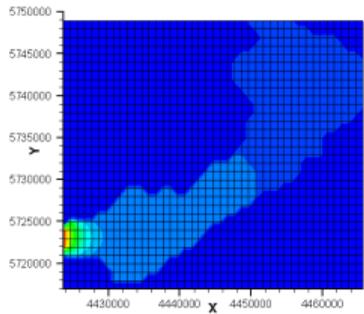
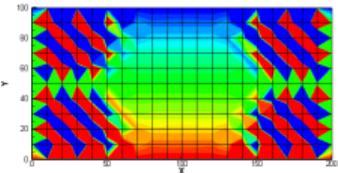
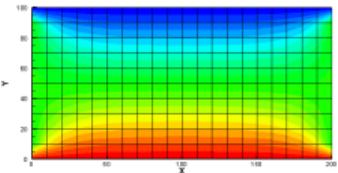
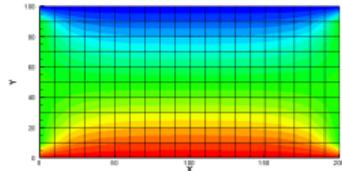
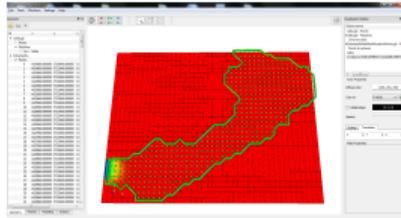
Lösungen (PDE) - analytisch → exakte Lösung $\psi \rightarrow L(\psi) = 0$
 - numerisch → Näherungslösung $\hat{\psi} \rightarrow L(\hat{\psi}) \neq 0$

Übersicht: Beispiele

explizite FDM

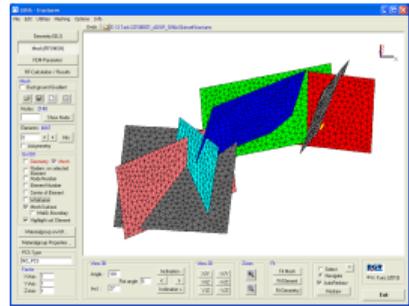


implizite FDM



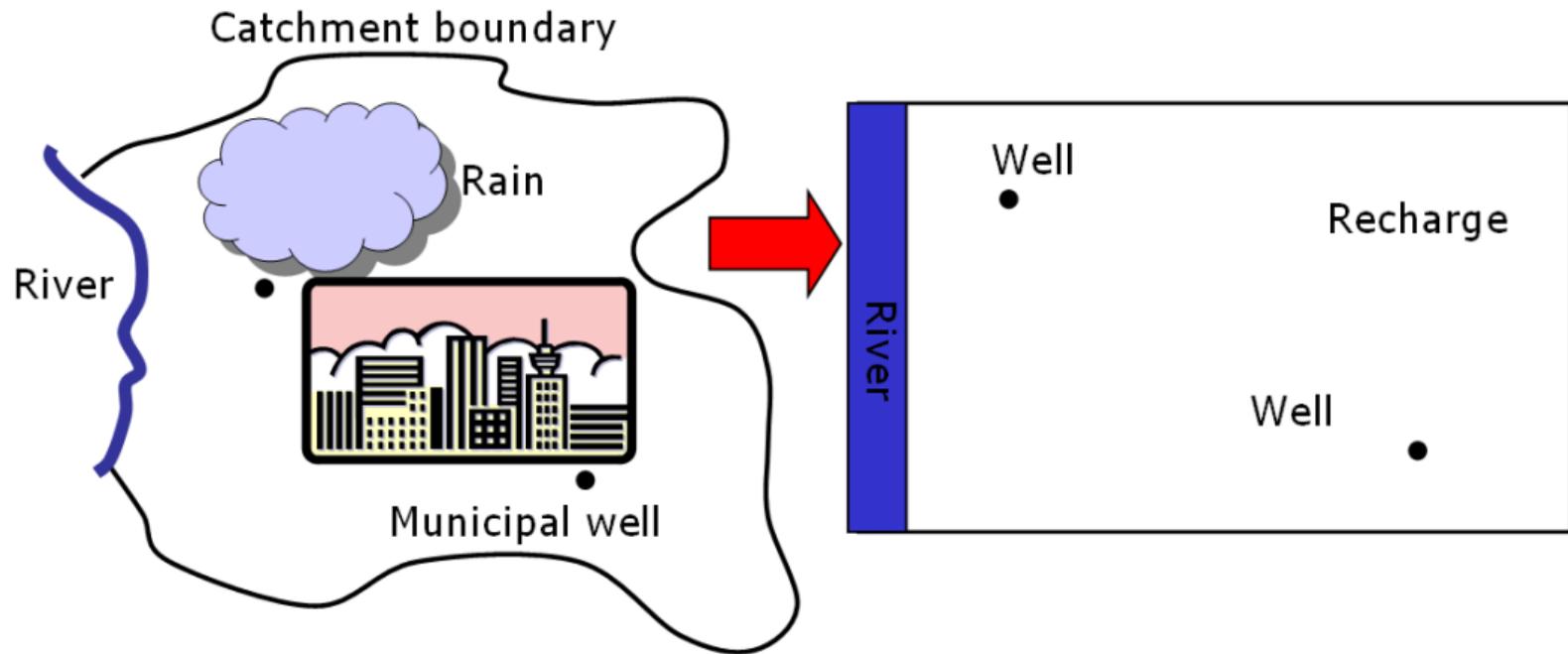
- Pro / Cons
- FDM: einfache Implementierung, starre Geometrien
- FEM: schwieriger zu implementieren (heute), flexible Geometrien

FEM



Übung

- Prinzipbeispiel Grundwassermodell



Quelle: Sebastian Bauer (Uni Kiel)