Zeitplan: Modellierung von Hydrosystemen

Sommersemester 2020

Datum	V	Thema	.
05.06.2020	01	Einführung in GoToMeeting (Web-Conferencing)	
12.06.2020	02-03	Wiederholung Hydromechanik und Numerische Methoden	
19.06.2020	04-05	Grundwasserhydraulik und Prinzipbeispiel	
26.06.2020	06-07	Finite-Differenten-Methode: Explizit und implizit	
03.07.2020	08	Übung: Selke-Modell	
10.07.2020	09	Finite-Elemente-Methode	
17.07.2020	10	Vorbereitung Klausur	

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Modellierung von Hydrosystemen
"Numerische und daten-basierte Methoden"
BHYWI-22-V2-01 @ 2020
Einführung und Wdh. Mechanik

Olaf Kolditz

*Helmholtz Centre for Environmental Research – UFZ

[1]Technische Universität Dresden – TUDD

[2]Centre for Advanced Water Research – CAWR

12.06.2020 - Dresden

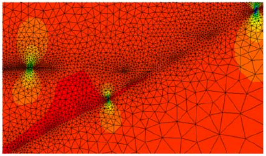
TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Fahrplan für heute ...

- Grundlagen (kurze Wiederholung)
- Grundwassergleichung
- Prinzip-Beispiel
- Bilanzierung
- Berechnungsverfahren
- Lösung
- Übung MvH-01: Programmierung für Prinzip-Beispiel

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

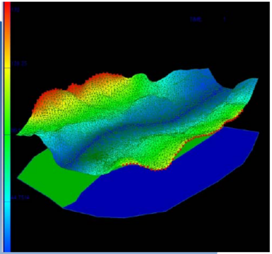
$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{\partial\psi}{\partial t} + \mathbf{v}^E \nabla\psi$$



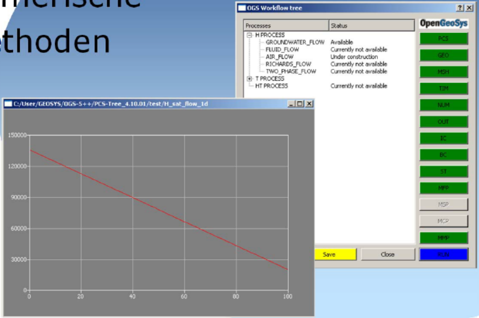
Basics

Mechanik

Anwendung



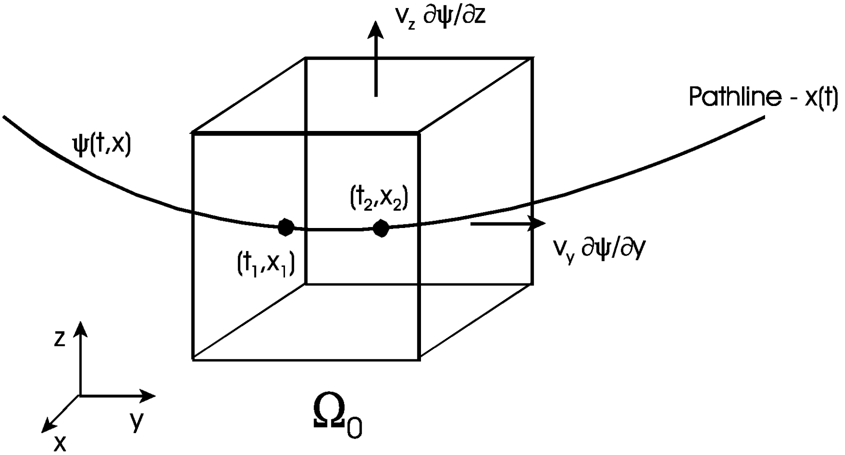
Numerische Methoden



Programmierung

Visual C++

Das Euler Prinzip (Wdh)



Fluid Momentum Balance (Wdh)

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = \mathbf{f}^e + \frac{1}{\rho}\nabla \cdot \sigma \tag{1}$$

In index notation the above vector equation is written as

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} &= \frac{1}{\rho}(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z}) \\
\frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z} &= \frac{1}{\rho}(\frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z}) \\
\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z} &= g + \frac{1}{\rho}(\frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z})
\end{aligned} \tag{2}$$

with $u = v_x, v = v_y, w = v_z$ and $\mathbf{f}^e = \mathbf{g}$.

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Flow Equations - Systematic (Wdh)

Stress Tensor

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + \tau \tag{3}$$

Navier-Stokes Equation

$$\boxed{\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = \mathbf{f}^e - \frac{1}{\rho}\nabla p + \nu \Delta \mathbf{v}} \tag{4}$$

Euler Equation

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = \mathbf{f}^e - \frac{1}{\rho}\nabla p \tag{5}$$

Stokes Equation

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \mathbf{f}^e - \frac{1}{\rho}\nabla p + \nu \Delta \mathbf{v} \tag{6}$$

Darcy Equations

$$0 = \mathbf{f}^e - \frac{1}{\rho}\nabla p + \nu \Delta \mathbf{v} \tag{7}$$

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Grundwassergleichung

$$\frac{\partial n\rho}{\partial t} + \nabla \cdot (n\rho\mathbf{v}) = Q_\rho \tag{8}$$

Für ein inkompressibles Fluid gilt dann (PF)

$$\rho\frac{\partial n}{\partial t} + \rho\nabla \cdot (n\mathbf{v}) = Q_\rho \tag{9}$$

oder noch besser

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot (n\mathbf{v}) = \frac{Q_\rho}{\rho_0} \tag{10}$$

In der Grundwasserhydraulik gilt

$$\begin{aligned} \frac{\partial n}{\partial t} &= S\frac{\partial h}{\partial t} && (11)\\ n\mathbf{v} = \mathbf{q} &= -\mathbf{K}\nabla h \quad \text{(Darcy Gesetz)} && (12) \end{aligned}$$

Grundwassergleichung - Parameter

Dabei sind: S der Speicherkoeffizient, h die Piezometer- oder hydraulische Höhe, $\mathbf{q}$ die Darcy- oder Filtergeschwindigkeit und $\mathbf{K}$ der hydraulische Leitfähigkeitstensor.

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Grundwassergleichung

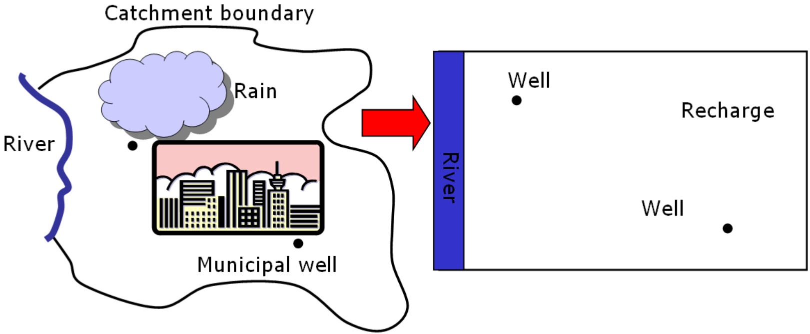
$$\begin{aligned} S\frac{\partial h}{\partial t} + \nabla \cdot (n\mathbf{v}) &= Q \\ S\frac{\partial h}{\partial t} - \nabla \cdot (\mathbf{K}\nabla h) &= Q \\ S\frac{\partial h}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\left(K_x\frac{\partial h}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(K_y\frac{\partial h}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(K_z\frac{\partial h}{\partial z}\right) &= Q \end{aligned}$$

Wir begnügen uns mit einem 2-D horizontalen Modell.

$$S\frac{\partial h}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\left(K_x\frac{\partial h}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(K_y\frac{\partial h}{\partial y}\right) = Q \qquad (13)$$

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Prinzip-Beispiel



Quelle: Sebastian Bauer (Uni Kiel)