

Hydroinformatik II: Gerinnehydraulik

¹Helmholtz Centre for Environmental Research – UFZ, Leipzig


²Technische Universität Dresden – TUD, Dresden

Dresden, 17. Juni 2016

Vorlesungsplan Hydroinformatik II SoSe 2016

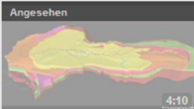
#	Datum	Thema
01	08.04.2016	Einführung
02	15.04.2016	Grundlagen: Kontinuumsmechanik
03	22.04.2016	Grundlagen: Hydromechanik
04	29.04.2016	Grundlagen: Partielle Differentialgleichungen / T _E X
05	06.05.2016	HW: Qt Installation (2016)
06	13.05.2016	Qt Übung: Funktionsrechner; Grundlagen Numerik
07	20.05.2016	Pfingsten
08	27.05.2016	Numerik: (exp) Finite Differenzen Methode
09	03.06.2016	Vorbereitung für den Beleg
10	10.06.2016	Numerik: (imp) Finite Differenzen Methode
11	17.06.2016	Gerinnehydraulik: Theorie - Grundlagen
12	24.06.2016	HW: Gerinnehydraulik: Programmierung, Übung 1
13	01.07.2016	Gerinnehydraulik: Programmierung, Übung 2
14	08.07.2016	Gerinnehydraulik: Programmierung, Übung 3
15	15.07.2016	Kurs-Zusammenfassung, Ausblick und Beleg

OGS ... Science@YouTube




OpenGeoSys hat ein Video hochgeladen vor 12 Stunden

Angesehen

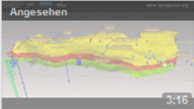


IWAS - Saudi Arabien
14 Aufrufe
IWAS Modellregion Saudi-Arabien
<http://www.iwas-initiative.de>




OpenGeoSys hat ein Video hochgeladen vor 2 Monaten

Angesehen




3D Groundwater Model: Western Dead Sea
95 Aufrufe
Development of a 3D groundwater flow model of the western Dead Sea escarpment of the Dead Sea (Israel + West Bank), using the



OpenGeoSys hat ein Video hochgeladen vor 8 Monaten

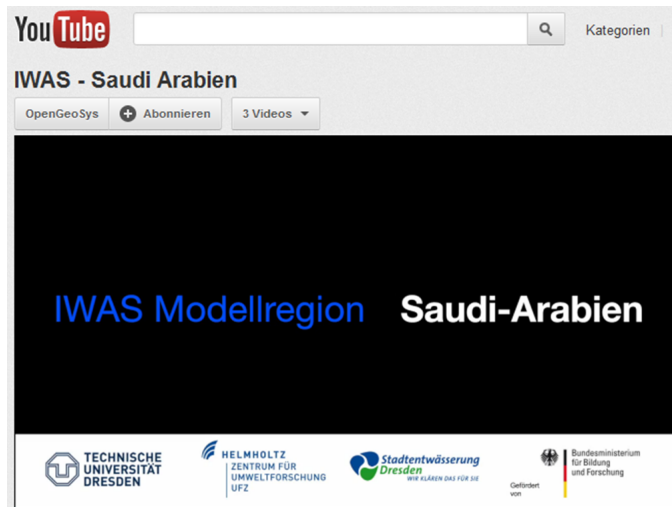
Angesehen



Water Challenge Beijing
392 Aufrufe
Water Resources Management in Mega-Cities: Water Challenge Beijing

fo für den HI-2 Beleg ...

OGS ... Science@YouTube



bitte mal anklicken ..., search OpenGeoSys @ YouTube

Hydroinformatik - Anwendungen

1. Abfallwirtschaft: Diffusionsprozesse
2. Hydrology: Gerinnehydraulik (→ this)
3. Grundwasserwirtschaft: Grundwasserhydraulik (→ next)

Lehrinhalte

1. Gerinnehydraulik: Parameter, Symbole ...
2. Energieerhaltung: Bernoulli-Gleichung
3. Impulserhaltung: Saint-Venant-Gleichungen
4. Lösung der Bernoulli-Gleichung
5. Newton-Verfahren
6. \mapsto numerisches Lösungsverfahren (nächste Veranstaltung)

Hydrologie - Gerinnehydraulik

Für die Beschreibung von Strömungsprozessen in Flüssen (d.h. Gerinne) gibt es zwei verschiedene Möglichkeiten basierend auf den sogenannten Bernoulli (Energiebetrachtung) oder Saint-Venant Gleichungen. Wir verwenden die erste für die Implementierung in C++ (Bildquellen: Technische Hydromechanik).



Bernoulli-Gleichung #0

- ▶ History
- ▶ gelebt 1700-1782
- ▶ Freund von L Euler
- ▶ Bernoulli Gleichung
- ▶ kinetische Theorie der Gase
- ▶ russ. Akademie Petersburg
- ▶ Vater/Sohn Beziehung

Bernoulli-Gleichung #1

$$z_{i+1} + \frac{p_{i+1}}{\rho g} + \frac{v_{i+1}^2}{2g} = z_i + \frac{p_i}{\rho g} + \frac{v_i^2}{2g} + h_f \quad (1)$$

- ▶ Symbole
- ▶ Gesetz von Darcy-Weisbach für streckenabhängige Verluste

$$h_f = \lambda \frac{x_{i+1} - x_i}{d_{hy}} \frac{v^2}{2g} \quad (2)$$

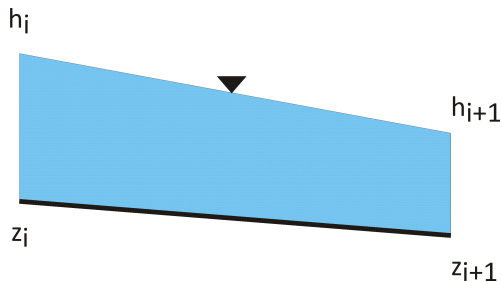
- ▶ Symbole (Zusammenfassung später)
- ▶ Gesetz von Darcy-Weisbach für streckenabhängige Verluste

$$d_{hy} = 4r_{hy} = 4 \frac{A}{P} \quad (3)$$

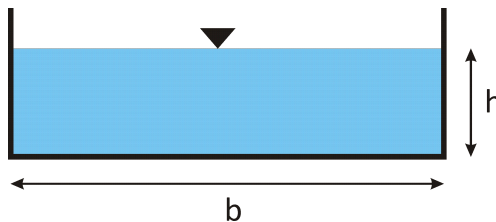
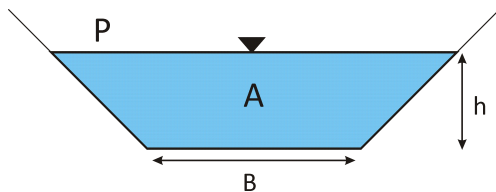
Bernoulli-Gleichung #2

$$p = \rho gh \quad (4)$$

$$z_{i+1} + h_{i+1} + \frac{v_{i+1}^2}{2g} = z_i + h_i + \frac{v_i^2}{2g} + h_f, \quad E = h + \frac{v^2}{2g} \quad (5)$$



Channel Geometry



Bernoulli-Gleichung #3

► Durchfluss

$$Q = A v = b h v \quad (6)$$

$$z_{i+1} + h_{i+1} + \frac{Q_{i+1}^2}{2g b^2 h_{i+1}^2} = z_i + h_i + \frac{Q_i^2}{2g b^2 h_i^2} + h_f \quad (7)$$

Fluid Momentum Balance - Navier-Stokes equation

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \mathbf{f}^e + \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} \quad (8)$$

In index notation the above vector equation is written as

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} &= \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} \right) \\ \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} &= \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} \right) \\ \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} &= g + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad (9)$$

with $u = v_x, v = v_y, w = v_z$ and $\mathbf{f}^e = \mathbf{g}$.

Saint-Venant-Gleichung #0

- ▶ History
- ▶ gelebt 1797-1886
- ▶ 1D open channel flow
- ▶ shallow water equations (Flachwassergleichungen)
- ▶ Stokes equation (is his)
- ▶ Engineer
- ▶ Count

Saint-Venant-Gleichungen #1

- ▶ Saint-Venant-Gleichungen
- ▶ Vertikal gemittelte Navier-Stokes-Gleichung
- ▶ 2D Flachwasser-Gleichungen (Filmchen)
- ▶ Mittelung über die Querschnittsfläche
- ▶ 1D Gerinnehydraulik
- ▶ Fließgeschwindigkeit $v = Q/A$ in Flußrichtung

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad (10)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} \frac{Q}{A} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q^2}{2A^2} + gh(x, A) \right) = g(S_o - S_f) \quad (11)$$

Saint-Venant-Gleichungen #2

- ▶ Stationäre Bedingungen

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} (A(x, h)v) &= 0 \\ \frac{d}{dx} \left(\frac{v^2}{2} + gh(x, A) \right) &= g(S_o - S_f)\end{aligned}\quad (12)$$

unter Verwendung der Primärvariablen A und Q

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{Q(h)^2}{2A(h)^2} + gh(x, A) \right) = g(S_o - S_f)\quad (13)$$

- ▶ Nichtlineare Gleichung

Parameter

Symbol	Parameter	Englisch	Einheit
h	Wasserspiegel	water surface elevation	m
i	Sohlenspiegel	channel datum	m
z	Wassertiefe	water depth	m
Z_L, Z_R	linke / rechte Böschung	left / right channel slope	m
Q	Durchfluss	discharge	$\text{m}^3 \text{s}^{-1}$
A	Querschnittsfläche	channel cross-section	m^2
B	Breite	channel width	m^2
P	benetzter Umfang	wetted perimeter	m
R, r_{hy}	hydraulische Radius	hydraulic radius	m
U	stromaufwärts	upstream	-
D	stromabwärts	downstream	-
Δx	Abstand zwischen U und D	distance between U and D	m
h_v	kinetische Energie	velocity head	m
h_f	Reibungsverluste	friction head	m
S_o	Sohlgefälle	bed slope	-
S_f	Streckenverlust	friction slope	-

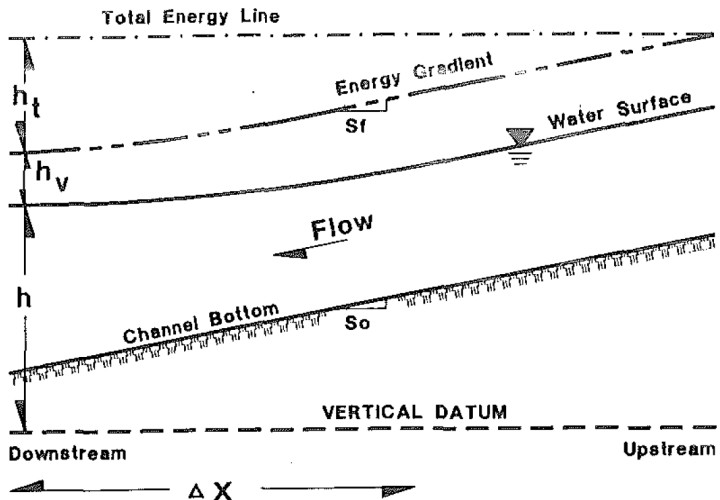
Energiebetrachtung #1

$$z_{i+1} + \frac{p_{i+1}}{\rho g} + \frac{v_{i+1}^2}{2g} = z_i + \frac{p_i}{\rho g} + \frac{v_i^2}{2g} + h_f \quad (14)$$

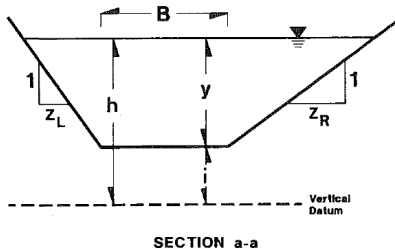
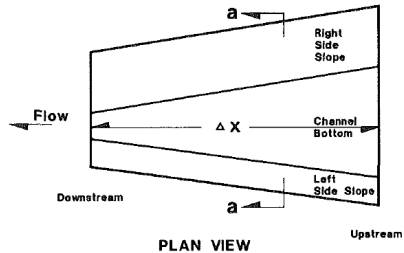
$$h_f = \lambda \frac{x_{i+1} - x_i}{d_{hy}} \frac{v^2}{2g} \quad (15)$$

$$d_{hy} = 4r_{hy} = 4 \frac{A}{P} \quad (16)$$

Energiebetrachtung #2: Bernoulli/Saint-Venant



Energiebetrachtung #3: Bernoulli



Energiebetrachtung #4 Geometrie

- Die trapezoide Querschnittsfläche des Gerinnes kann folgendermaßen berechnet werden (Abb. 1).

$$A = y \left[B + y \frac{Z_L + Z_R}{2} \right] \quad (17)$$

- Der benetzte Umfang des Gerinnes ist.

$$P = B + y \left[\sqrt{1 + Z_L^2} + \sqrt{1 + Z_R^2} \right] \quad (18)$$

- Der hydraulische Radius ergibt sich dann als.

$$R = \frac{A}{P} \quad (19)$$

- Letztlich benötigen wir noch den Zusammenhang von Fließgeschwindigkeit und Durchfluss.

$$v = \frac{Q}{A} = \frac{Q}{y \left[B + y \frac{Z_L + Z_R}{2} \right]} \quad (20)$$

Energiebetrachtung #5 Streckenverluste

Die Streckenverluste lassen sich nach Manning wie folgt beschreiben

$$S_f = \left(\frac{Q}{AR^{2/3}} \right)^2 \quad (21)$$

$$S_f = Q^2 A^{-2} R^{-4/3} \quad (22)$$

mit

$$R = \frac{y(B + yC_4)}{B + yC_5} \quad (23)$$

Energiebetrachtung #6 Parameters

$$C_4 = \frac{Z_L + Z_R}{2} \quad (24)$$

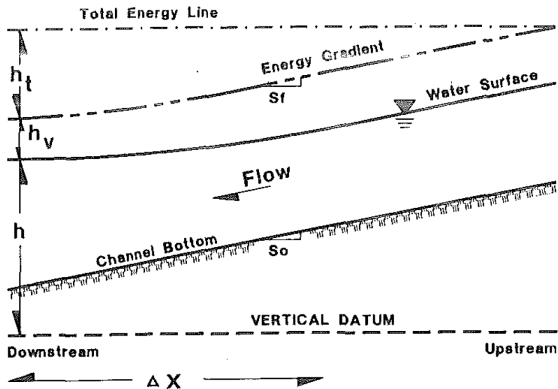
$$C_5 = \sqrt{1 + Z_L^2} + \sqrt{1 + Z_R^2} \quad (25)$$

$$S_f = Q^2(y(B + C_4y))^{-2} \left(\frac{y(B + yC_4)}{B + yC_5} \right)^{-4/3} \quad (26)$$

$$S_f = Q^2(By + C_4y)^{-2}(By + C_4y^2)^{-4/3}(B + C_5y)^{4/3} \quad (27)$$

$$S_f = Q^2(By + C_4y^2)^{-10/3}(B + C_5y)^{4/3} \quad (28)$$

Lösung einer nichtlinearen Gleichung #1



$$f(h) = \left(h + \frac{v^2}{2g} \right) \Big|_D - \left(h + \frac{v^2}{2g} \right) \Big|_U + \Delta X \frac{(S_{f,U} + S_{f,D})}{2} = 0 \quad (29)$$

Lösung einer nichtlinearen Gleichung #2

$$f(h) = \left(h + \frac{v^2}{2g} \right) |_D - \left(h + \frac{v^2}{2g} \right) |_U + \Delta x \frac{(S_{f,U} + S_{f,D})}{2} \quad (30)$$

$$f(h) = \left(h + \frac{Q^2}{2gA^2} \right) |_D - \left(h + \frac{Q^2}{2gA^2} \right) |_U + \Delta x \frac{(S_{f,U} + S_{f,D})}{2} \quad (31)$$

- Konstruktion eines Newton-Verfahrens

$$h_{k+1} = h_k + \frac{f(h_k)}{f'(h_k)} \quad (32)$$

Math: Newton-Verfahren #1

- ▶ Nichtlineare Gleichung

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) \mathbf{x} = \mathbf{b}(\mathbf{x}) \quad (f(h) = 0) \quad (33)$$

- ▶ Residuum

$$\mathbf{R}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}(\mathbf{x}) \mathbf{x} - \mathbf{b}(\mathbf{x}) = 0 \quad (34)$$

- ▶ Taylor-Reihe

$$\mathbf{R}_{k+1} = \mathbf{R}_k + \left[\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{x}} \right]_k \Delta \mathbf{x}_{k+1} + 0(\Delta \mathbf{x}_{k+1}^2) \quad (35)$$

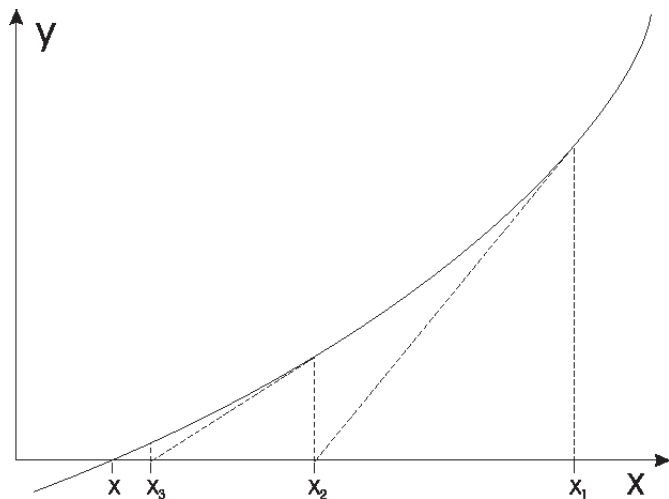
- ▶ Umstellen

$$\Delta \mathbf{x}_{k+1} \approx -\mathbf{J}_k^{-1} \mathbf{R}_k \quad (\mathbf{R}_{k+1} = 0) \quad (36)$$

- ▶ Lösungsvorschrift

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \Delta \mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k - \mathbf{J}_k^{-1} \mathbf{R}_k \quad (37)$$

Math: Newton-Verfahren #2



$$y = R(x)$$

Numerisches Verfahren #1

- ▶ Newton-Verfahren: $\mathbf{x} = h$

$$h_{k+1} = h_k + \frac{f(h_k)}{f'(h_k)} = \frac{\mathbf{R}_k}{\mathbf{J}_k} \quad (38)$$

- ▶ $f'(h) = f'(y)$

$$\frac{d}{dh} \left(h + \frac{v^2}{2g} \right) = \frac{d}{dh} \left(h + \frac{Q^2}{2gA^2} \right) = 1 - \frac{Q^2}{2gA^3} \frac{dA}{dh} \quad (39)$$

$$\frac{dA}{dh} = \frac{d}{dh} (y(B + C_4y)) = B + C_4y + yC_4 = B + 2C_4y \quad (40)$$

Numerisches Verfahren #2

Bleibt noch die Differenzierung der Streckenverluste

$$\frac{dS_f}{dh} = S'_f = \frac{d}{dh} \left(\frac{Q}{AR^{2/3}} \right)^2 \quad (41)$$

$$S'_f = \left[Q^2 (By + C_4 y^2)^{10/3} \frac{4}{3} (B + C_5 y)^{1/3} C_5 \right] + \left[(B + y C_5)^{4/3} \frac{-10 Q^2}{3} (By + C_4 y^2)^{13/3} (B + 2 C_4 y) \right] \quad (42)$$

$$S'_f = \frac{4}{3} Q^2 C_5 (By + C_4 y^2)^{-10/3} (B + C_5 y)^{1/3} - \frac{10}{3} Q^2 (B + 2 C_4 y) (B + C_5 y)^{4/3} (By + C_4 y^2)^{-13/3} \quad (43)$$