

Angewandte Umweltsystemanalyse: Finite-Differenzen-Methode (FDM) - Stationäre Grundwasserströmung

Prof. Dr.-Ing. habil. Olaf Kolditz

¹Helmholtz Centre for Environmental Research – UFZ, Leipzig

²Technische Universität Dresden – TUD, Dresden

Dresden, 03. Juli 2015

Vorlesungsplan SoSe 2015: Hydrosystemanalyse

#	Datum	Vorlesung	Übung	Skript
1	17.04.15	Einführung, Systemanalyse		
2	17.04.15	Grundwasserhydraulik: Einzugsgebiet Bilanzierung, Vorlesung		1.1+2
3	24.04.15	Grundwasserhydraulik: Einzugsgebiet Bilanzierung, Übung		1.3
7	22.05.15	Grundwasserhydraulik: Finite-Differenzen-Verfahren, Rechteckaquifer		
11	12.06.15	Grundwasserhydraulik: Finite-Differenzen-Verfahren, Selke	BHYWI-22-E3	1.4, 1.5
13	19.06.15	Grundwasserhydraulik: Finite-Differenzen-Verfahren, OOP, VTK, iFDM	BHYWI-22-E4	1.5, 1.6
15	26.06.15	Grundwasserhydraulik: implizites Finite-Differenzen-Verfahren, Randbedingungen	BHYWI-22-E15	1.5
20	03.07.15	Grundwasserhydraulik: Finite-Elemente-Verfahren		
23	10.07.15	UFZ-Exkursion: VISLAB		
32	17.07.15	Klausurvorbereitung		

Lecture Table of Contents

- ▶ implizites Verfahren - Grundidee
- ▶ implizite FD Gleichungen
- ▶ Implementierung
- ▶ Testbeispiel
- ▶ **Stationäres Problem**

Selke Einzugsgebiet

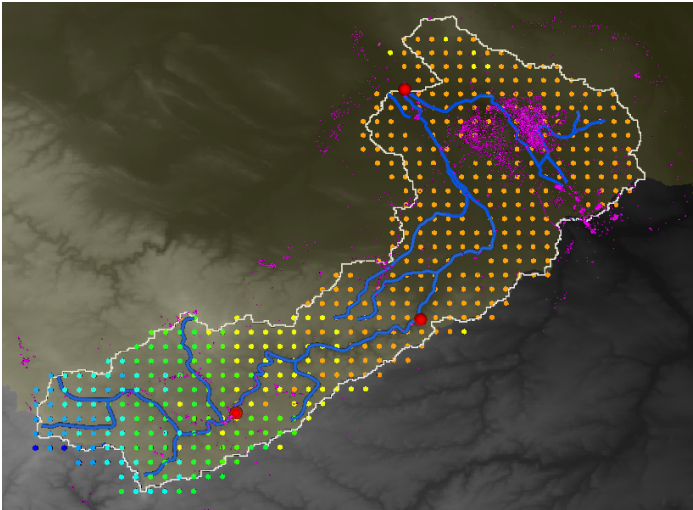


Abbildung: Untersuchungsgebiet - Selke

2D implizite FDM - Stationäres Problem

$$S \frac{\partial h}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left(K_x \frac{\partial h}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(K_y \frac{\partial h}{\partial y} \right) = Q \quad (1)$$

$$S = 0$$

► Gleichung

$$\begin{aligned}
 & - K_{i,j}^x \frac{u_{i+1,j}^{n+1} - 2u_{i,j}^{n+1} + u_{i-1,j}^{n+1}}{\Delta x^2} \\
 & - K_{i,j}^y \frac{u_{i,j+1}^{n+1} - 2u_{i,j}^{n+1} + u_{i,j-1}^{n+1}}{\Delta y^2} = Q_{i,j}
 \end{aligned} \quad (2)$$

2D implizite FDM - Stationäres Problem

- ▶ Gleichungssystem

$$\begin{aligned} & 2 \left(\frac{K^x}{\Delta x^2} + \frac{K^y}{\Delta y^2} \right) u_{i,j}^{n+1} \\ & - \left(\frac{K^x}{\Delta x^2} \right) (u_{i-1,j}^{n+1} + u_{i+1,j}^{n+1}) - \left(\frac{K^y}{\Delta y^2} \right) (u_{i,j-1}^{n+1} + u_{i,j+1}^{n+1}) \\ & = Q_{i,j} \end{aligned} \quad (3)$$

2D implizite FDM - Stationäres Problem

Wir vereinfachen die Gleichung (3) wieder, indem wir für den Moment annehmen, dass $K^x = K^y = K$ (Isotropie) und $\Delta x = \Delta y = \Delta l$ (gleichförmige Diskretisierung).

$$\begin{aligned} & \left(\frac{4}{\Delta l^2} \right) u_{i,j}^{n+1} \\ - & \left(\frac{1}{\Delta l^2} \right) (u_{i-1,j}^{n+1} + u_{i+1,j}^{n+1} + u_{i,j-1}^{n+1} + u_{i,j+1}^{n+1}) \\ = & \frac{Q_{i,j}}{K} \end{aligned} \tag{4}$$

2D implizite FDM - Stationäres Problem

- Gleichungssystem in Matrixschreibweise

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 4 & -1 & & & & & & & \\ -1 & 4 & -1 & & & & & & \\ & & \dots & \dots & \dots & & & & \\ & & & & -1 & 4 & -1 & & \\ & & & & -1 & 4 & & & \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} h_1 \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ h_{IJ} \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}}$$

(5)

2D implizite FDM - Stationäres Problem

- ▶ Gleichungssystem nach Einbau der Randbedingungen

```
4 0 0 0 0 0 0 0 0 0 b:4
0 4 -1 0 0 0 0 0 0 0 b:1
0 -1 4 -1 0 0 0 0 0 0 b:0
0 0 -1 4 -1 0 0 0 0 0 b:0
0 0 0 -1 4 -1 0 0 0 0 b:0
0 0 0 0 -1 4 -1 0 0 0 b:0
0 0 0 0 0 -1 4 -1 0 0 b:0
0 0 0 0 0 0 -1 4 0 0 b:-1
0 0 0 0 0 0 0 0 4 0 b:-4
```

2D implizite FDM - Stationäres Problem

► Ergebnisse

```
ZONE T="BIG ZONE", I=3, J=3, DATAPACKING=POINT
0 0 1
1 0 0.267857
2 0 0.0714286
0 1 0.0178571
1 1 -9.29613e-19
2 1 -0.0178571
0 2 -0.0714286
1 2 -0.267857
2 2 -1
```

K : Vergleichen sie die Ergebnisse mit den der instationären Berechnung.

K : Ändern sie die Problemgröße (Vergrößern von i_x, i_y) und vergleichen sie die Ergebnisse..

2D implizite FDM

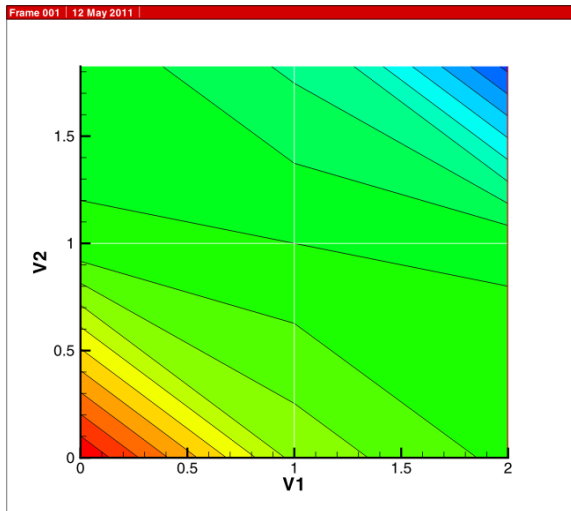


Abbildung: Testbeispiel mit Dirichlet-Randbedingungen

2D implizite FDM - Neumann-Randbedingungen

- ▶ Differenzengleichung für Knoten mit Neumann-Randbedingungen
- ▶ Richtungsabhängigkeiten

$$\frac{-u_{i-1,j} - u_{i+1,j} + 4u_{i,j} - u_{i,j-1} - u_{i,j+1}}{\Delta x^2} \quad (6)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad \rightarrow \quad u_{i-1,j} = u_{i+1,j} \quad (7)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad \rightarrow \quad u_{i,j-1} = u_{i,j+1} \quad (8)$$

2D implizite FDM - Neumann-Randbedingungen

- ▶ $\partial u / \partial x$, left boundary

$$\frac{-2u_{i+1,j} + 4u_{i,j} - u_{i,j-1} - u_{i,j+1}}{\Delta l^2} \quad (9)$$

- ▶ $\partial u / \partial x$, right boundary

$$\frac{-2u_{i-1,j} + 4u_{i,j} - u_{i,j-1} - u_{i,j+1}}{\Delta l^2} \quad (10)$$

- ▶ $\partial u / \partial y$, top boundary

$$\frac{-u_{i-1,j} - u_{i+1,j} + 4u_{i,j} - 2u_{i,j-1}}{\Delta l^2} \quad (11)$$

- ▶ $\partial u / \partial y$, bottom boundary

$$\frac{-u_{i-1,j} - u_{i+1,j} + 4u_{i,j} - 2u_{i,j+1}}{\Delta l^2} \quad (12)$$

2D implizite FDM - Neumann-Randbedingungen

► Knotengleichungen

$$4u_1 - u_2 - u_4 = 0$$

$$-u_1 + 4u_2 - u_3 - 2u_5 = 0$$

$$-2u_2 + 4u_3 - 2u_6 = 0$$

$$-u_1 + 4u_4 + 2u_5 - u_7 = 0$$

$$-u_2 - u_4 + 4u_5 - u_6 - u_8 = 0$$

$$-u_3 - 2u_5 + 4u_6 - u_9 = 0$$

$$-2u_4 + 4u_7 - 2u_8 = 0$$

$$-2u_5 - u_7 + 4u_8 - u_9 = 0$$

$$-u_6 - u_8 + u_9 = 0$$

(13)

2D implizite FDM - Neumann-Randbedingungen

► Gleichungssystem

Neumann

$$\begin{array}{cccccccc}
 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
 -1 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 \\
 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & -1 \\
 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4
 \end{array}$$

Dirichlet

$$\begin{array}{cccccccc}
 4 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 -1 & 4 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 4 & -1 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 4
 \end{array}$$

2D implizite FDM - Neumann-Randbedingungen

► Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcccccccccc}
 1 : (1, 1) & 4u_1 & -u_2 & & -u_4 & & & & & & = 1 \\
 2 : (2, 1) & -u_1 & +4u_2 & -u_3 & & -2u_5 & & & & & = 0 \\
 3 : (3, 1) & & -2u_2 & +4u_3 & & & -2u_6 & & & & = 0 \\
 4 : (1, 2) & -u_1 & & & +4u_4 & -2u_5 & & -u_7 & & & = 0 \\
 5 : (2, 2) & & -u_2 & & -u_4 & +4u_5 & -u_6 & & -u_8 & & = 0 \\
 6 : (3, 2) & & & -u_3 & & -2u_5 & +4u_6 & & & -u_9 & = 0 \\
 7 : (1, 3) & & & & -2u_4 & & & +4u_7 & -2u_8 & & = 0 \\
 8 : (2, 3) & & & & & -2u_5 & & -u_7 & +4u_8 & -u_9 & = 0 \\
 9 : (3, 3) & & & & & & -u_6 & & -u_8 & +4u_9 & = -1
 \end{array}$$

2D implizite FDM - Neumann-Randbedingungen

► Gleichungssystem

$$\begin{aligned}4u_1 - 2u_2 - 2u_4 &= 0 \\-u_1 + 4u_2 - u_3 - 2u_5 &= 0 \\-2u_2 + 4u_3 - 2u_6 &= 0 \\-u_1 + 4u_4 - 2u_5 - u_7 &= 0 \\-u_2 - u_4 + 4u_5 - u_6 - u_8 &= 0 \\-u_3 - 2u_5 + 4u_6 - u_9 &= 0 \\-2u_4 + 4u_7 - 2u_8 &= 0 \\-2u_5 - u_7 + 4u_8 - u_9 &= 0 \\-2u_6 - 2u_8 + 4u_9 &= 0\end{aligned}$$

(14)

2D implizite FDM + Dirichlet-Randbedingungen

- ▶ Matrix nach Einbau der Neumann- und Dirichlet-Randbedingungen

```
4  0  0  0  0  0  0  0  0  0  b:4
0  4 -1  0 -2  0  0  0  0  0  b:1
0 -2  4  0  0 -2  0  0  0  0  b:0
0  0 -1  4 -2  0  0  0  0  0  b:0
0  0  0 -1  4 -1  0  0  0  0  b:0
0  0  0  0 -2  4 -1  0  0  0  b:0
0  0  0 -2  0  0  4 -2  0  0  b:0
0  0  0  0 -2  0 -1  4  0  0  b:-1
0  0  0  0  0  0  0  0  4  0  b:-4
```

2D implizite FDM - Neumann-Randbedingungen

