

Verfahren zur multikriteriellen Entscheidungsanalyse bei Unsicherheit

Martin Drechsler

1 Einleitung

Ein Ziel der ökologisch-ökonomischen Bewertung ist die Integration ökologischer und sozialer Parameter wie Biodiversität, Wasserqualität, Wohnqualität oder Zahl von Arbeitsplätzen in ökonomische Betrachtungen. Ein häufig beschrittener Weg ist der Versuch, diese Größen zu monetarisieren, das heißt ihren ökonomischen Wert zu berechnen (z. B. Marggraf und Streb 1997). Damit lassen sich alle ökonomischen, ökologischen und sozialen Parameter auf derselben Skala messen und zu einem einzigen Gesamtwert, gemessen in DM oder Euro, addieren. Ziel jeglicher Entscheidung oder Planung ist es dann, diesen monetären Gesamtwert zu maximieren. Der Entscheidungsprozeß orientiert sich also an einer einzigen Größe, und man spricht von einem monokriteriellen Entscheidungsproblem.

Die Monetarisierung nichtökonomischer Größen bereitet im allgemeinen jedoch sowohl prinzipielle als auch praktische Probleme. Ein wichtiger Einwand gegen die Monetarisierung ist beispielsweise die Ethik. Zum Beispiel kann Arbeitslosigkeit mit positiven ökonomischen Effekten einhergehen; sie ist jedoch ethisch nicht vertretbar und hat überdies auch unerwünschte Nebenwirkungen, die in ökonomischen Bilanzen oft nicht auftreten. Gleiches gilt für ökologische Werte. Nach Meinung eines Teils der Bevölkerung besitzt nichtmenschliches Leben (nach Meinung mancher sogar auch abiotische Ressourcen) einen Wert an sich, egal ob die Organismen oder Ressourcen für den Menschen nützlich sind oder nicht. Ein weiteres Problem ist das der intergenerationellen Verteilungsgerechtigkeit. Es ist ethisch bedenklich, Ressourcen in einer Weise zu nutzen, so daß die Lebensqualität künftiger Generationen beeinträchtigt wird. Die adäquate Berücksichtigung der genannten Werte sind zentrale Bestandteile einer ökologisch, ökonomisch und sozial nachhaltigen Entwicklung. Eine Monetarisierung dieser Werte ist schwierig oder völlig unmöglich (siehe dazu die Beiträge von Geyler und Messner in diesem Bericht).

Die nicht oder schwer monetarisierbaren Größen müssen auf eigenen nichtmonetären Skalen gemessen bzw. bewertet werden. Die Bewertung ist damit insgesamt nicht eindeutig, sondern mehrdimensional bzw. multikriteriell. Problematisch wird dies, wenn die multikriterielle Bewertung Grundlage von Abwägungsprozessen sein soll. Liegen der Bewertung z. B. zwei verschiedene Maßstäbe wie ökonomisches Wachstum und Biodiversität zugrunde, so kann es Handlungs- oder Planungsalternativen geben, welche die erste Größe maximieren und die andere minimieren oder umgekehrt. Man spricht dann von einem Trade-off zwischen Biodiversität und ökonomischem Wachstum. In einer solchen Situation trotzdem zu einer sinnvollen Entscheidung zu kommen, ist das Thema der multikriteriellen Entscheidungsanalyse (vgl. Zimmermann und Gutsche 1991; Stewart 1992).

Die Erfüllung von Zielen, z. B. des Gewinnwachstums eines Unternehmens, hängt mehr oder weniger von nicht vorhersagbaren Entwicklungen ab, beispielsweise von der Nachfrage nach dem erzeugten Produkt. In diesem Fall ist sowohl der zu erwartende Gewinn von Interesse als auch die mögliche Abweichung (Schwankungsbreite) des eingetretenen vom erwarteten Gewinn. Je nachdem, wieviel Risiko jemand bereit ist einzugehen, um einen bestimmten zu erwartenden Gewinn zu erzielen, bezeichnet man sie/ihn als risikofreudig oder risikoavers. Ist die Schwankungsbreite des Gewinns nicht bekannt und muß eine Entscheidung gefällt werden, so spricht man von einer Entscheidung unter Unsicherheit. Risiko ist quantifizierte Unsicherheit. Mit Zusatzannahmen kann Unsicherheit quantifiziert, also in Risiko umgewandelt werden.

Bei der Diskussion der vorteilhaftesten Landnutzung im Altkreis Torgau treten sowohl das Problem der Mehrdimensionalität als auch Unsicherheit bzw. Risiko auf. Bei der Planung und Entscheidungsfindung müssen ökologische, soziale und ökonomische Kriterien berücksichtigt werden (siehe Beiträge von Horsch und Ring, Geyley und Messner in diesem Bericht). Insbesondere besteht ein potentieller Konflikt zwischen Trinkwasserbereitstellung und anderen wirtschaftlichen Nutzungsformen wie Landwirtschaft und Kiesabbau. Risiko tritt auf, da z. B. sowohl der künftige Trinkwasserbedarf als auch der Bedarf nach Gewerbeflächen nicht genau vorhergesagt werden kann. Des weiteren ist der Zusammenhang zwischen Stoffeintrag (z. B. Nitrat) und Grundwasser- bzw. Trinkwasserbelastung nicht exakt naturwissenschaftlich faßbar. Bei dem Abwägungsprozeß zwischen unterschiedlichen möglichen Entwicklungsszenarien für den Kreis Torgau handelt es sich also um ein multikriterielles Entscheidungsproblem bei Unsicherheit bzw. Risiko. Im folgenden soll ein formales Konzept vorgestellt werden, das einen solchen Entscheidungsprozeß unterstützen und als methodische Grundlage für die Konfliktbewertung im Altkreis Torgau dienen soll. Dazu folgt zunächst ein kurzer Überblick über die Entscheidungstheorie. Anschließend werden zwei aus der Literatur bekannte Methoden näher vorgestellt, die sich für die Lösung des vorliegenden Entscheidungsproblems anbieten. Beide Methoden berücksichtigen allerdings den Risikoaspekt nicht oder nur implizit, weshalb sie in den dann folgenden Kapiteln um die Risiko-Komponente erweitert werden. Dabei orientiere ich mich an einem Zahlenbeispiel aus der Literatur (Brans und Mareschal 1990).

2 Multikriterielle Entscheidungstheorie

Die Aufgabe einer Entscheidungsanalyse ist zunächst, sich über die Struktur des Entscheidungsproblems eine klare Vorstellung zu machen, wie Klauer et al. in ihrem Beitrag ausführen. In diesem Zusammenhang muß überlegt werden, welche ökonomischen, ökologischen und sozialen Ziele relevant sind und welche Präferenzen für die verschiedenen Ziele vorliegen, das heißt, wie wichtig jedes einzelne Ziel im Vergleich zu den anderen ist. Daneben muß Klarheit herrschen über die zur Auswahl stehenden Handlungsmöglichkeiten und darüber, wie gut welches Ziel erreicht wird, wenn diese oder jene Handlungsalternative gewählt wird. Diese Zusammenhänge zwischen Handlungsalternativen und Grad der Zielerreichung können in einer sogenannten Ergebnismatrix dargestellt werden. Jedes Element e_{ij} dieser Matrix gibt an,

wie gut Ziel i bei Wahl von Alternative j erreicht wird. Eine solche Ergebnismatrix ist das Ergebnis einer ökologischen und ökonomischen Bewertung, wie in den Beiträgen von Geyler und Messner in diesem Bericht beschrieben. Sie ist notwendige Grundlage jeder multikriteriellen Entscheidungsanalyse. Zimmermann und Gutsche (1991) unterscheiden zwischen „multi-attribute decision making“ (MADM) und „multi-objective decision making“ (MODM). Die beiden Typen von Entscheidungsverfahren unterscheiden sich im wesentlichen darin, wie die Handlungsalternativen definiert sind. In den MADM-Methoden steht man vor der Auswahl einer relativ kleinen Anzahl diskret voneinander unterschiedenen Handlungsalternativen. Ein Entscheidungsproblem mit diskreten Alternativen ergibt sich z. B. an einer Wegkreuzung, an der entschieden werden muß, ob man geradeaus gehen oder nach links oder nach rechts abbiegen sollte. In den MADM-Methoden werden die einzelnen Alternativen in bezug auf die Ziele (Attribute) verglichen und die günstigste ausgewählt.

Beindet man sich dagegen z. B. auf einem großen und freien Platz, so gibt es unendlich viele Möglichkeiten, das heißt Richtungen, sich vom aktuellen Ort zu entfernen. Welche Richtung gewählt wird, kann durch eine einzige Größe angegeben werden, nämlich den Winkel α zwischen eingeschlagener Richtung und etwa der Nordrichtung. Dieser Winkel kann unendlich viele verschiedene Werte von 0 bis 360° annehmen. Dementsprechend gibt es in einem MODM-Problem auch keine Ergebnismatrix mit diskreten Elementen e_{ij} , sondern die Zielerreichungsgrade – etwa die nötige Zeit, um den Rand des Platzes zu erreichen – werden durch mathematische Funktionen – im Beispiel $f_i(\alpha)$ – dargestellt. Die Kenntnis dieser Zielerreichungsfunktionen ist Voraussetzung für die Lösung eines MODM-Problems. Der Informationsbedarf in einem MODM ist damit größer als in einem MADM, dafür hat man aber auch die Möglichkeit, diejenige(n) Handlungsalternative(n) zu identifizieren, die in bezug auf die Zielfunktionen f_i optimal ist (sind). Bei den MADM-Methoden kann man dagegen ja nur aus dem endlichen Satz der vorliegenden Alternativen die beste(n) auswählen. Beide, MADM und MODM, erlauben vollständige Kompensation, das heißt eine schlechte Erfüllung eines Kriteriums i_1 kann durch eine entsprechende Verbesserung des Kriteriums i_2 kompensiert werden.

Von den klassischen MADM- und MODM-Methoden unterscheiden Zimmermann und Gutsche (1991) die sogenannten entscheidungstechnologischen Verfahren, die dieselbe Grundstruktur (also einen diskreten bzw. kontinuierlichen Handlungsraum) haben, sich aber besser zur Berücksichtigung von unsicherer, unvollständiger oder widersprüchlicher Information eignen. Herausgreifen will ich hier die sogenannten Outranking-Verfahren, speziell das Verfahren PROMETHEE, welches mir als das einfachste der Outranking-Verfahren zu sein scheint und sich daher für Erweiterungen zur Berücksichtigung von Risiko am besten eignet. Beim Outranking werden die (in endlicher Zahl zur Auswahl stehenden) Handlungsalternativen in eine Rangordnung gesetzt, die jedoch im Gegensatz zu klassischen MADM-Ansätzen nicht transitiv oder vollständig sein muß. Transitivität bedeutet, wenn von den Alternativen A, B und C die Alternative A besser als B ist und B besser als C, so muß auch A besser als C sein. Vollständigkeit bedeutet, daß A, B und C tatsächlich miteinander vergleichbar sind.

Die Grundphilosophie des Outranking ist, daß Kompensation wie in den klassischen Verfahren nur eingeschränkt möglich ist. Kommt es z. B. vor, daß eine Alternative A bezüglich

eines Kriteriums i sehr viel schlechter abschneidet als eine Alternative B , so kann sie das nur dann kompensieren, wenn sie dafür in wenigstens einem anderen Kriterium sehr viel besser ist als Alternative B . Ist A in den anderen Kriterien dagegen nur etwas besser als B , so ist keinerlei Kompensation möglich, selbst wenn A die Alternative B in allen Kriterien außer i (leicht) übertreffen sollte. In anderen Worten: „einmal viel wiegt mehr als viele Male wenig“.

2.1 Das PROMETHEE-Verfahren

Das PROMETHEE-Verfahren soll im folgenden kurz skizziert werden. Ausführlichere Zahlenbeispiele finden sich in dem Beitrag von Messner¹ und in Kapitel 4. Das Verfahren orientiert sich an der Ergebnismatrix in Tabelle 1. Die Zahlen stammen aus einem Fallbeispiel von Brans und Mareschal (1990).

Tab. 1: Ergebnismatrix.

Alternative Kriterium	A	B	C	D	E	F
1	-80	-65	-83	-40	-52	-94
2	90	58	60	80	72	96
3	-60	-20	-40	-100	-60	-70
4	-54	-97	-72	-75	-20	-36
5	-8	-1	-4	-7	-3	-5
6	5	1	7	10	8	6

Alle 6 Kriterien in dem Beispiel sollen maximiert werden. Dabei handelt es sich bei den negativen Bewertungen um Kosten, bei den positiven um Nutzen. Der Alternativenvergleich im PROMETHEE-Verfahren erfolgt paarweise. Will man in Tabelle 1 beispielsweise Alternative A mit Alternative B vergleichen, so wird dieser Vergleich für jedes einzelne der sechs Kriterien durchgeführt. Wie stark man A der Alternative B bezüglich Kriterium i vorzieht, wird durch eine vom Entscheidenden zu definierende Präferenzfunktion $\Pi_i(A,B)$ gemessen. Die Stärke der Präferenz ist dabei ein Wert zwischen 0 und 1 und soll nur von der Differenz der Bewertungen beider Alternativen bezüglich Kriterium i abhängen. Beispielsweise erfüllt A das Kriterium 2 mit einer Bewertung von 90 und B mit 58, also ist die Differenz zwischen beiden Bewertungen $d_i(A,B)=32$. Die Präferenz von A über B soll nun nur von dieser Differenz $d_i(A,B)$ abhängen. Es gilt übrigens $d_i(A,B)=-d_i(B,A)$.

Die Präferenzfunktion kann z. B. so aussehen wie in Abbildung 1 (durchgezogene Linie) gezeigt: Erfüllen A und B das untersuchte Kriterium i genau gleich gut ($d_i(A,B)=0$), so ist A indifferent zu B , also $\Pi_i(A,B)=0$. Ebenso ist dann $\Pi_i(B,A)=0$, das heißt B ist bezüglich Kriterium i auch indifferent zu A . Übertrifft A dagegen die Alternative bezüglich Kriterium i ($d_i(A,B)>0$), so gilt $\Pi_i(A,B)=1$ und $\Pi_i(B,A)=0$, das heißt A dominiert B in Kriterium i und B

¹ Dort sind die Kriterien allerdings in der Zeile und die Alternativen in der Spalte der Ergebnismatrix dargestellt.

dominiert A nicht. Übertrifft andererseits B die Alternative A ($d_i(A,B)=-d_i(B,A)<0$), so ist $\Pi_i(A,B)=0$ und $\Pi_i(B,A)=1$.

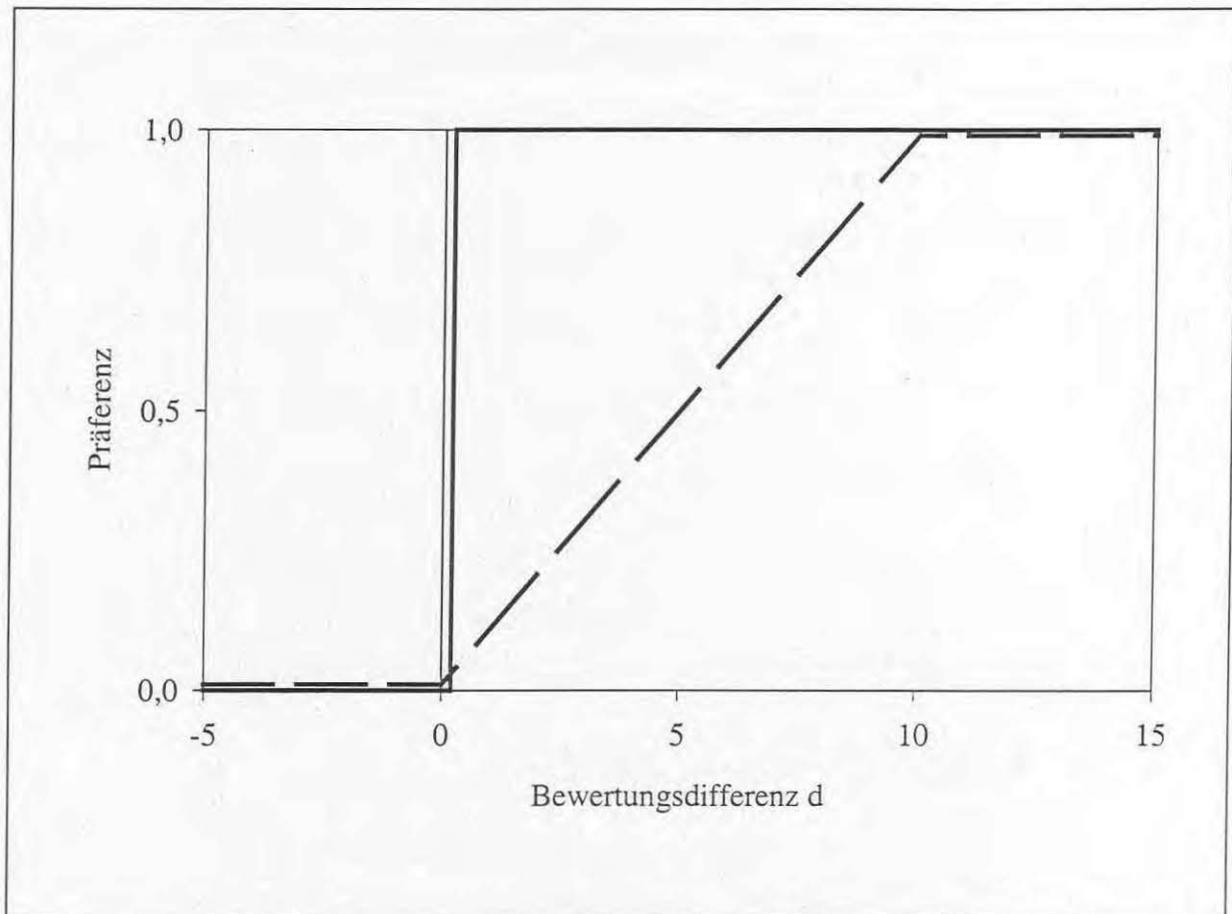


Abb. 1: Zwei mögliche Präferenzfunktionen Π (durchgezogene Linie und gestrichelte Linie). Die Präferenz Π hängt ab von der Differenz d zwischen zwei Bewertungen.

Eine andere mögliche Präferenzfunktion ist in Abbildung 1 (gestrichelte Linie) gezeigt. Hier hat eine Alternative A eine um so höhere Präferenz, je größer die Differenz in der Bewertung $d_i(A,B)$ ist. Ist $d_i(A,B)=0$, so ist $\Pi_i(A,B)=\Pi_i(B,A)=0$. Für $d_i(A,B)=5$ erhält man beispielsweise $\Pi_i(A,B)=0,5$. Für $d_i(A,B)\geq 10$ erhält man $\Pi_i(A,B)=1$.

Für jedes Alternativenpaar (X,Y) mit X und Y aus der Menge $\{A,B,\dots,F\}$ und jedes Kriterium i ($i=1\dots 6$) wird nun ein Vergleich wie oben beschrieben durchgeführt und die Präferenzen $\Pi_i(A,B)$ und $\Pi_i(B,A)$ bestimmt. Ferner muß für jedes Kriterium i ein Gewicht w_i festgelegt werden, das die relative Wichtigkeit dieses Kriteriums gegenüber den anderen Kriterien angibt. Die Summe über die Gewichte aller $n=6$ Kriterien sei 1. Haben alle Kriterien dasselbe Gewicht, so gilt $w_i=1/6$ ($i=1\dots 6$). Ist nichts über die relative Bedeutung der Kriterien bekannt, so sollte ebenfalls $w_i=1/6$ gesetzt werden. Die Präferenz der Alternative A über die Alternative B bezüglich aller Kriterien $i=1\dots n$ ist nun durch die Summe

$$\Pi(A, B) = \sum_{i=1}^6 w_i \Pi_i(A, B) \quad (1)$$

gegeben. In Gleichung (1) werden alle Π_i summiert, wobei jedes mit dem Gewicht w_i eingeht. Je größer $\Pi(A, B)$, desto stärker ist A der Alternative B vorzuziehen. Zimmermann und Gutsche (1991) bezeichnen die Größe $\Pi(A, B)$ auch als Outranking-Relation. Sie wird für jedes Alternativenpaar (X, Y) ermittelt.

Man betrachte weiter die Alternative A und vergleiche sie mit allen anderen Alternativen B, C, ..., F. Die jeweiligen Outranking-Relationen $\Pi(A, B)$, $\Pi(A, C)$, ..., $\Pi(A, F)$, geben an, wie stark A den Alternativen B bis F vorzuziehen ist. Die Summe aller dieser Outranking-Relationen

$$\Phi^+(A) = \Pi(A, B) + \Pi(A, C) + \dots + \Pi(A, F) \quad (2)$$

gibt an, wie stark die Alternative insgesamt vorzuziehen ist. Alternativ geben die Outranking-Relationen $\Pi(B, A)$, $\Pi(C, A)$, ..., $\Pi(F, A)$ an, wie stark die Alternativen B bis F der Alternative A vorzuziehen sind. Die Summe

$$\Phi^-(A) = \Pi(B, A) + \Pi(C, A) + \dots + \Pi(F, A) \quad (3)$$

gibt an, wie stark die Menge der anderen Alternativen B bis F insgesamt der Alternative A vorzuziehen ist. Die Größen Φ^+ und Φ^- werden nun für jede der Alternativen A bis F durch entsprechendes Summieren der Outranking-Relationen ermittelt. Bei der Berechnung von Φ^+ bleibt dabei das erste Argument der Outranking-Relationen fest und das andere ist variabel (Gl. 2), während bei der Berechnung von Φ^- das erste Argument variabel und das zweite fest ist (Gl. 3). Die beiden Größen werden auch als Ausgangs- (Φ^+) und Eingangsflüsse (Φ^-) bezeichnet. Je größer Φ^+ und je kleiner Φ^- für eine bestimmte Alternative, desto besser schneidet diese im Vergleich zu den anderen ab. Der sogenannte Gesamtfluß Φ ist für jede Alternative gegeben durch die Differenz von Ausgangs- und Eingangsfluß, also

$$\Phi = \Phi^+ - \Phi^- \quad (4)$$

Je größer Φ für eine bestimmte Alternative, desto besser schneidet diese gegenüber den anderen Alternativen ab. Aus den Eingangs- und Ausgangsflüssen lassen sich nun die folgenden Relationen ableiten.

Eine Alternative X dominiert eine Alternative Y (XDY), wenn eine Präferenz sowohl im Eingangs- als auch im Ausgangsfluß festgestellt werden kann:

$$\Phi^+(X) > \Phi^-(Y) \quad \text{und} \quad \Phi^-(X) < \Phi^+(Y). \quad (5)$$

Zwei Alternativen X und Y sind indifferent (XIY), wenn Gleichheit sowohl im Eingangs- als auch im Ausgangsfluß vorliegt:

$$\Phi^+(X) = \Phi^-(Y) \quad \text{und} \quad \Phi^-(X) = \Phi^+(Y). \quad (6)$$

Zwei Alternativen X und Y sind nicht vergleichbar (XRY), wenn weder Indifferenz noch Dominanz vorherrscht, also wenn Eingangs- und Ausgangsfluß widersprüchliche Ergebnisse liefern:

$$\begin{aligned} & [\Phi^+(X) > \Phi^-(Y) \quad \text{und} \quad \Phi^-(X) > \Phi^+(Y)] \quad \text{oder} \\ & [\Phi^+(X) < \Phi^-(Y) \quad \text{und} \quad \Phi^-(X) < \Phi^+(Y)]. \end{aligned} \quad (7)$$

In einem solchen Fall liegt ein nicht auflösbarer Trade-off zwischen beiden Alternativen vor. Für jedes Alternativenpaar (X,Y) ist festzustellen, welche der drei Relationen zutrifft. Das Ergebnis läßt sich in Matrixform schreiben, welche als Präordnungsmatrix bezeichnet wird und sich graphisch darstellen läßt (siehe Beispiel in Kapitel 4.1). Die Präordnungsmatrix gibt an, welche der Alternativen welcher vorzuziehen ist und welche Alternativen nicht miteinander verglichen werden können.

Man kann jedoch auch die Vergleichbarkeit aller Alternativen erzwingen, indem man nicht die Eingangs- und Ausgangsflüsse betrachtet, sondern die Nettoflüsse Φ . Hier kann man alle Alternativen in eine einzige und eindeutige Rangfolge setzen, wobei der Rang einer Alternative umso höher ist, je größer ihr Nettofluß ist. Nicht auflösbare Trade-offs werden also quasi mit Gewalt entschieden. Man bezeichnet diese Vorgehensweise als PROMETHEE 2. Verwendet man dagegen die oben beschriebene Präordnungsmatrix und läßt Unvergleichbarkeiten zwischen Alternativen zu, so spricht man von PROMETHEE 1. Ein ausführliches Zahlenbeispiel folgt in Kapitel 4.

2.2 Deskriptive Entscheidungsanalyse

Das oben beschriebene Verfahren dient dazu, Entscheidungsvorschläge zu machen. Leider ist es trotz der relativen Einfachheit des Verfahrens nicht immer einfach zu verfolgen, wie und warum ein bestimmtes Ergebnis zustande kommt, das heißt, wie es sich aus der Ergebnismatrix (Tab. 1) entwickelt. Die Information, die noch in der Ergebnismatrix enthalten war, ist weitgehend verlorengegangen zugunsten einer kompakten und leicht darstellbaren Alternativen-Rangordnung. So nützlich letztere für die Entscheidungsfindung ist, wäre es auch wünschenswert, ein Verfahren zu haben, in dem die Information der Ergebnismatrix etwas ursprünglicher, aber doch schon in kompakter Form dargestellt werden kann. Dies ist die Aufgabe von Entscheidungsverfahren, die ich als „deskriptive Verfahren“ bezeichne. Damit ist nicht eine deskriptive Entscheidungsanalyse im Sinne Sieben und Schildbachs (1987) gemeint, bei der es darum geht, in der realen Welt ablaufende Entscheidungsprozesse und die

dabei auftretenden Probleme zu beschreiben. Mit „deskriptiv“ meine ich in diesem Beitrag, daß die wesentlichen Zusammenhänge der Ergebnismatrix (Tab. 1) lediglich kompakt dargestellt (beschrieben) werden, ohne konkrete Handlungsempfehlungen, wie z. B. im PROMETHEE-Verfahren, abzuleiten. Das kompakteste deskriptive Entscheidungsverfahren, das mir bekannt ist, ist die sogenannte Hauptachsenanalyse (vgl. Stewart 1992), die auch in anderen Wissenschaften, etwa der Botanik, eingesetzt wird, um multivariate, das heißt mehrdimensionale Daten (wie z. B. in Tab. 1) in übersichtlicher und eingängiger Form zu präsentieren. Die Idee soll hier kurz skizziert werden. Eine ausführlichere mathematische Beschreibung des Verfahrens erfolgt im Anhang. Die Daten in Tabelle 1 sind 6-dimensional. Die Zeilen und die Spalten der Ergebnismatrix, also die Kriterien einerseits und die Alternativen andererseits, lassen sich jeweils als 6-dimensionale Vektoren bzw. als Punkte in einem 6-dimensionalen Raum auffassen. In einer Hauptachsenanalyse projiziert man diese Punkte in geschickter Weise auf einen zweidimensionalen Raum, das heißt auf eine Ebene, so daß möglichst wenig von der ursprünglich 6-dimensionalen Information verlorengeht. Ähnliche oder korrelierte Punkte (also verwandte Kriterien oder verwandte Alternativen) liegen in dieser Projektion dichter zusammen als unähnliche bzw. negative korrelierte Punkte. Das Ergebnis der Hauptachsenanalyse für die Ergebnismatrix aus Tabelle 1 zeigt Abbildung 2.

Die sechs Kriterien und die sechs Alternativen finden sich als Punkte im Hauptachsenraum wieder. Man betrachte zunächst die sechs Kriterien (schwarze Punkte). Die Kriterien 2 und 4

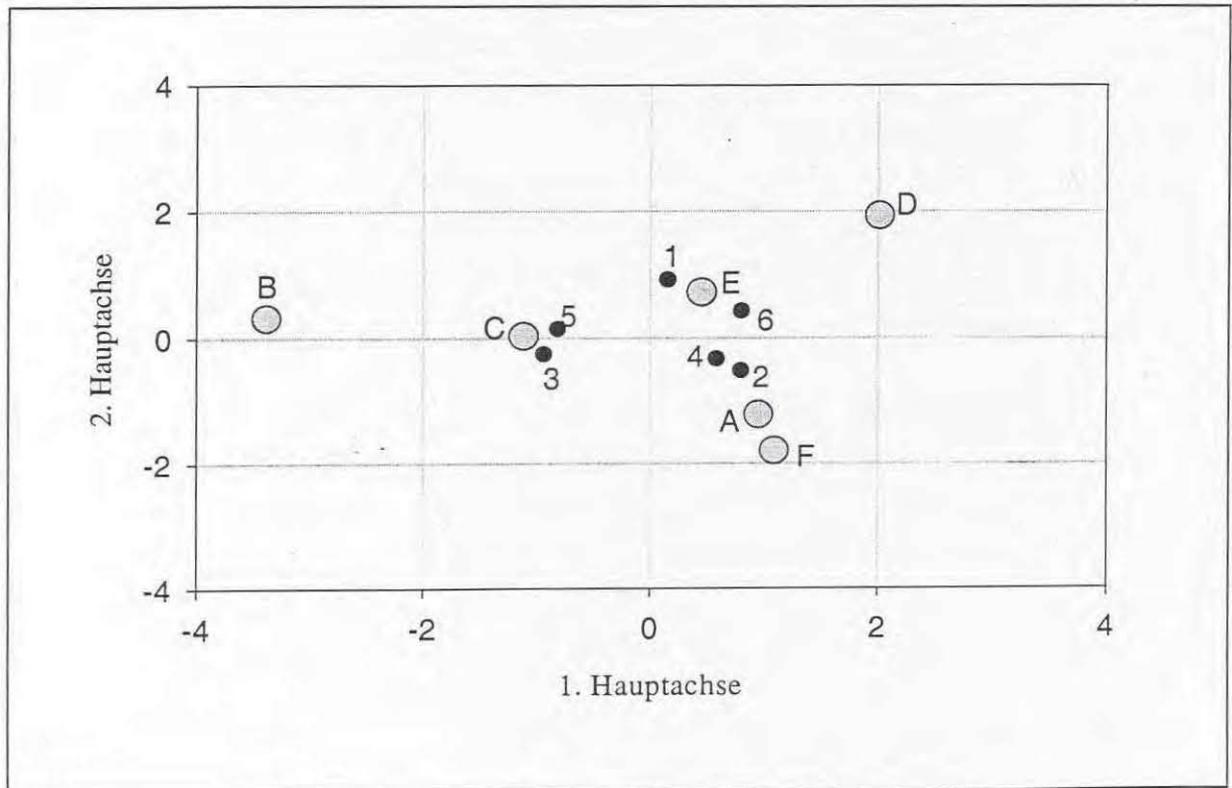


Abb. 2: Kriterien 1 bis 6 (schwarze Punkte) und Alternativen A bis F (graue Punkte) im Hauptachsenraum.

liegen relativ dicht beieinander, ebenso die Kriterien 3 und 5 und die Kriterien 1 und 6. Dies bedeutet, daß eine gute Erfüllung von Kriterium 2 auch eine recht gute Erfüllung von 4 impliziert, das heißt solche Alternativen, die Kriterium 2 gut erfüllen, erfüllen im allgemeinen auch Kriterium 4 gut. Man kann diese Aussage auch durch genaues Betrachten der Ergebnismatrix (Tab. 1) bestätigt finden. Eine äquivalente Aussage läßt sich auch für die Kriterienpaare (3, 5) und (1, 6) treffen.

Der Abstand zwischen den drei Kriterienpaaren ist in Abbildung 2 größer als der Abstand innerhalb einzelner Paare, also der Abstand zwischen den Kriterien jeweils eines Paares. Dies bedeutet, daß es höchstwahrscheinlich einen Trade-off gibt zwischen verschiedenen Kriterienpaaren. Eine gute Erfüllung beispielsweise der Kriterien 2 und 4 impliziert eine relativ schlechte Erfüllung der anderen vier Kriterien. Insgesamt gibt es in Tabelle 1 also grob einen Trade-off zwischen den drei verschiedenen Kriteriengruppen: (2, 4), (3, 5) und (1, 6).

Analog kann man nun die Alternativen betrachten (graue Punkte in Abb. 2). Die Alternativen A und F liegen dicht zusammen, ebenso B und C sowie D und E. Dies bedeutet, daß die Alternativen A und F sich bezüglich der sechs Kriterien zumindest qualitativ ähnlich verhalten, das heißt erfüllt A einen Teil der Kriterien relativ gut und einen anderen relativ schlecht, so gilt dies ungefähr auch für F. Hier sollte betont werden, daß eine Hauptachsenanalyse ein approximatives Verfahren ist und die Ergebnisse Fehlern unterliegen. Die Ergebnisse sollten daher nur als grobe Richtwerte verstanden werden. Durch eingängiges Betrachten der Ergebnismatrix (Tab. 1) sollten sie überdies, wenn möglich, überprüft werden.

Ein letztes Ergebnis der Hauptachsenanalyse betrifft das Verhältnis der Alternativen zu den individuellen Kriterien. Auch hier gilt, daß diejenigen Alternativen tendenziell dasjenige Kriterium am besten erfüllen, dem sie in Abbildung 2 am nächsten liegen. Der Begriff „nah“ ist jedoch genau zu spezifizieren. Die Positionen der Alternativen (und auch der Kriterien) im Hauptachsenraum sind eindeutig bestimmt bis auf einen Skalenfaktor. Diese Uneindeutigkeit bedeutet, daß man z. B. den Abstand jeder einzelnen Alternative zum Koordinatenursprung verdoppeln könnte. Man könnte ihn auch halbieren oder mit einem anderen Faktor multiplizieren; entscheidend ist allerdings, daß für alle Alternativen derselbe Faktor verwendet wird. Damit bleiben die relativen Abstände der Alternativen zueinander identisch. Die oben gemachten Aussagen, die ja aus den relativen Abständen der Alternativen im Hauptachsenraum abgeleitet wurden, bleiben daher auch trotz der Uneindeutigkeit des Skalenfaktors gültig. Dasselbe läßt sich auch für die Kriterien und die sie betreffenden Ergebnisse sagen, das heißt auch sie liegen bis auf einen beliebigen Skalenfaktor fest, was aber auf die relativen Abstände zwischen den Kriterien und die daraus abgeleiteten Aussagen keinen Einfluß hat.

Auswirkungen hat der Skalenfaktor allerdings auf die Abstände zwischen Kriterien und Alternativen, da für Kriterien einerseits und Alternativen andererseits zwei unterschiedliche Skalenfaktoren gewählt werden können. Was jedoch trotz Uneindeutigkeit der Skalenfaktoren konstant bleibt, ist der Winkelabstand zwischen Kriterien und Alternativen, das heißt die Winkel zwischen den Verbindungslinien der einzelnen Kriterien und Alternativen mit dem Koordinatenursprung. Wenn man also sagt, daß eine Alternative dicht an einem bestimmten Kriterium, z. B. daß Alternative C dicht an Kriterium 5 liegt, dann heißt das, daß der *Win-*

kelabstand zwischen beiden gering ist, grob gesagt, sich beide Punkte, C und 5, *im selben Sektor* des Koordinatensystems befinden. So kann man aus Abbildung 2 nun ablesen, daß die Alternativen A und F dicht an (im selben Sektor wie) Kriterien 2 und 4 liegen, das heißt diese beiden Kriterien recht gut erfüllen sollten. Gleiches läßt sich für die Alternativen und Kriterien B, C, 3 und 5 sagen und für D, E, 1 und 6. Wie oben sollte jedoch wieder bemerkt werden, daß die Ergebnisse einer Hauptachsenanalyse nur grobe Richtwerte darstellen und anhand der Ergebnismatrix (Tab. 1) überprüft werden sollten.

3 Stochastische Präferenz und Signifikanz

3.1 Stochastische Präferenz

Die im letzten Kapitel beschriebenen Entscheidungsverfahren berücksichtigen Stochastik, das heißt Zufälligkeit, gar nicht oder nur implizit. Die deskriptive Hauptachsenanalyse ist völlig deterministisch, besitzt also keinerlei stochastische (zufällige) Elemente wie Unsicherheit und Risiko. Das PROMETHEE-Verfahren berücksichtigt Stochastik (Zufälligkeit) implizit, indem die Präferenz einer Alternative über eine andere nur dann anerkannt wird, wenn sie diese in dem betrachteten Kriterium i stark genug übertrifft. In Abbildung 1 (gestrichelte Linie) wird völlige Präferenz von Alternative A über B ($\Pi_i(A,B)=1$) nur dann anerkannt, wenn die Differenz der Bewertung $d_i(A,B)$ mindestens 10 ist; das heißt A muß B um mindestens 10 Einheiten des Kriteriums i übertreffen. Diese sogenannte „Fühlbarkeitsschwelle“ stellt sicher, daß geringe Bewertungsunterschiede $d_i(A,B)$ nicht oder nur wenig beachtet werden. Dies ist dann sinnvoll, wenn die Bewertungen Fehlern bzw. Zufälligkeiten unterliegen. Nur wenn $d_i(A,B)$ groß gegen diese Fehler ist, ist die Präferenz von A über B wirklich gesichert.

Im folgenden Kapitel 4 soll aus dieser impliziten Berücksichtigung von Stochastik eine explizite entwickelt werden. In Kapitel 5 wird die deterministische Hauptachsenanalyse zu einer stochastischen erweitert. Als Vorbereitung für diese Erweiterungen will ich in diesem Kapitel den Begriff der stochastischen Präferenz einführen. Angenommen, es wären zwei Alternativen A und B bezüglich eines Kriteriums i zu vergleichen. Das Bewertungsergebnis von A bezüglich Kriterium i betrage den Wert a , das von Alternative B den Wert b . Aufgrund von Unsicherheiten seien a und b mit Fehlern behaftet. Der wahrscheinlichste Wert von a sei $m(a)$ und es seien von diesem Wert Abweichungen von maximal plus oder minus $s(a)$ möglich, das heißt $m(a)-s(a) < a < m(a)+s(a)$. Analog liege b zwischen $m(b)-s(b)$ und $m(b)+s(b)$. Ich nehme einmal an, daß die Wahrscheinlichkeit $p(a)$ (strenggenommen handelt es sich bei $p(a)$ um eine Wahrscheinlichkeitsdichte), also die Wahrscheinlichkeit, die Bewertung a zu erhalten, durch Abbildung 3 gegeben sei. Die Wahrscheinlichkeit, einen Wert in der Nähe von $m(a)$ zu erhalten ist relativ groß, nimmt aber ab, je weiter man sich von $m(a)$ entfernt und wird null für Werte, die von $m(a)$ weiter als $s(a)$ entfernt sind. Analoges gilt für die möglichen Werte von b (Abb. 3). Die Präferenz von A über B ist nur dann hundertprozentig gesichert, wenn $m(a)-s(a) > m(b)+s(b)$ ist, das heißt, wenn a im ungünstigsten Fall ($a=m(a)-s(a)$) immer noch besser abschneidet als b im günstigsten Fall ($b=m(b)+s(b)$).

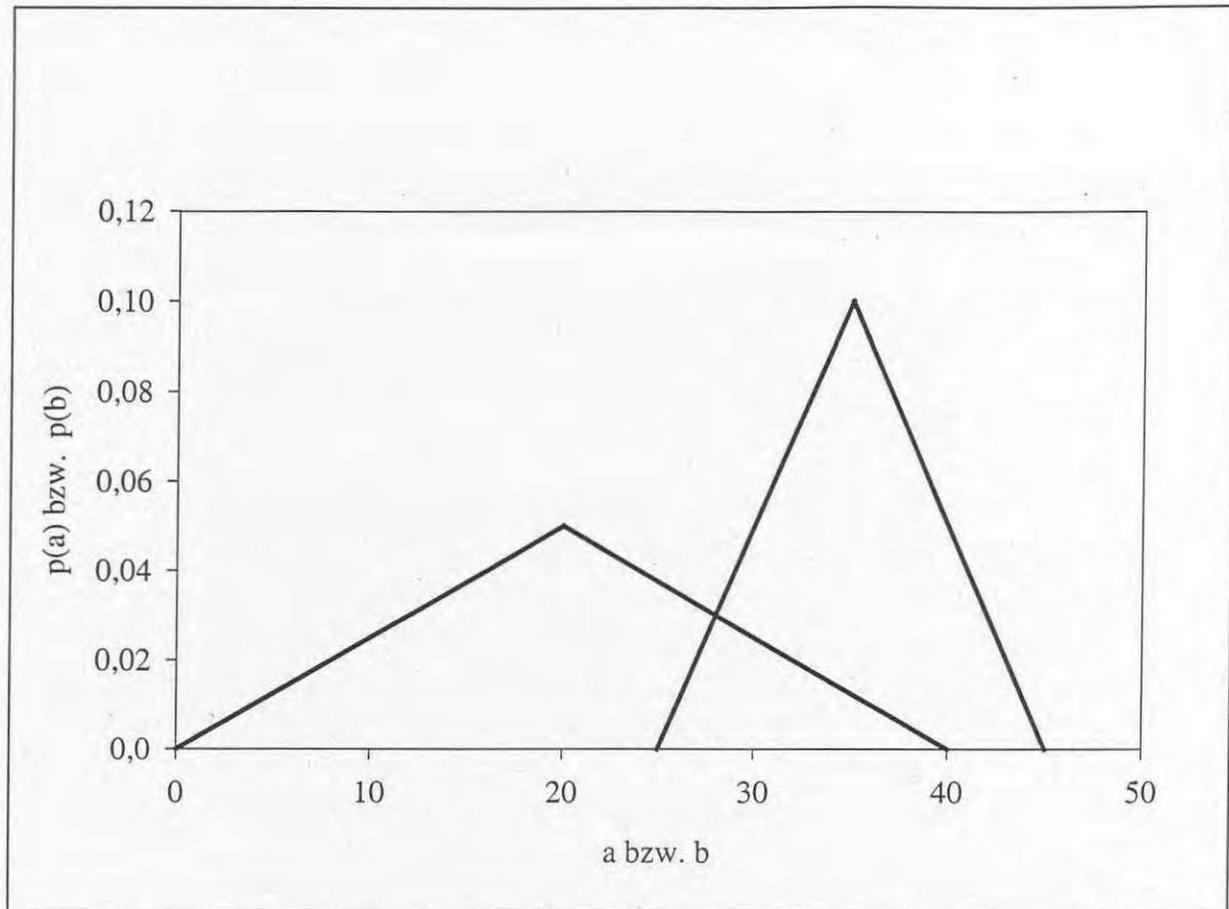


Abb. 3: Wahrscheinlichkeit $p(a)$, einen Wert a zu beobachten (rechte Kurve). Wahrscheinlichkeit $p(b)$, einen Wert b zu beobachten (linke Kurve).

Wenn diese Ungleichung nicht gilt, das heißt, wenn die beiden Verteilungen für a und b sich überlappen (Abb. 3), kann es, je nachdem wie es der Fehler will, vorkommen, daß $a > b$ oder $b < a$. Ob $a > b$ ist oder nicht, kann also nur in Form einer Wahrscheinlichkeit beurteilt werden. Die Wahrscheinlichkeit, ob $a > b$ in Abbildung 3, läßt sich sehr leicht über eine Monte-Carlo-Simulation feststellen. Dabei zieht man aus den beiden Verteilungen aus Abbildung 3 zunächst zwei Zufallszahlen \underline{a} und \underline{b} und prüft, ob $\underline{a} > \underline{b}$ ist oder nicht. Dieses „Würfeln“ mit anschließendem Vergleich führt man nun N mal durch, wobei N möglichst groß, wenigstens etwa 1000 sein sollte. Dabei zählt man, wie häufig $\underline{a} > \underline{b}$ beobachtet werden konnte und teilt das Ergebnis durch N . Der erhaltene Quotient ist gerade die Wahrscheinlichkeit, daß $a > b$ ist. Ich bezeichne sie mit $P(a > b)$. Wie oben geschildert, ist $P(a > b) = 1$, das heißt a ist mit Sicherheit größer als b , falls die Verteilung $p(a)$ in ihrer ganzen Ausdehnung rechts von $p(b)$ liegt, beide Verteilungen sich also nicht überlappen. Ist dagegen $m(a) = m(b)$, so ist der Überlapp beider Verteilungen vollständig (die Abweichungen $s(a)$ und $s(b)$ sind dabei irrelevant) und es gilt $P(a > b) = 0,5$, das heißt in 50% aller Fälle wird man $a > b$ beobachten. In diesem Fall wird man die Alternativen A und B als indifferent bezeichnen. Überlappen sich die beiden Verteilungen teilweise, so wird man Wahrscheinlichkeiten $P(a > b)$ zwischen 0,5 und 1,0 beobachten.

Als nächstes ist nun die Verbindung zur Präferenzfunktion im PROMETHEE-Verfahren herzustellen. Dort gilt (Abb. 1), daß bei Indifferenz $\Pi_i(A,B)=0$. Beobachtet man bei der Monte-Carlo-Simulation nun $P(a>b)=0,5$, so ist $a>b$ genauso wahrscheinlich wie $b>a$, die beiden Alternativen A und B sind also als indifferent einzuordnen: $\Pi_i(A,B)=0$. Im Fall $P(a>b)=1$ (das heißt a ist mit Sicherheit größer als b) liegt sichere Präferenz von A über B ($\Pi_i(A,B)=1$) vor. Zwischen diesen beiden Extremfällen der Indifferenz und der sicheren Präferenz nehme ich an, daß $\Pi_i(A,B)$ linear mit $P(a>b)$ ansteigt. Dies erreiche ich durch

$$\Pi(A,B) = 2 * [P(a > b) - 0,5] \quad (8)$$

Diese Präferenzfunktion ist eng verwandt mit der in Abbildung 1 (gestrichelte Linie). Man betrachte einmal den Spezialfall, daß die Fehler in a und in b gleich sind, also $s(a)=s(b)=s$. Nun variiere man die Differenz $m(a)-m(b)$ kontinuierlich von 0 bis $2s$. Bei $m(a)-m(b)=0$ erhält man, wie oben bemerkt, $P(a>b)=0,5$, also Indifferenz: $\Pi_i(A,B)=0$. Bei $m(a)-m(b) \geq 2s$ erhält man wie gesehen $P(a>b)=1$, also sichere Präferenz $\Pi_i(A,B)=1$. Die Präferenzwerte $\Pi_i(A,B)$ für den vollständigen Bereich $0 < m(b)-m(a) < 2s$ zeigt Abbildung 4. Je größer der Abstand

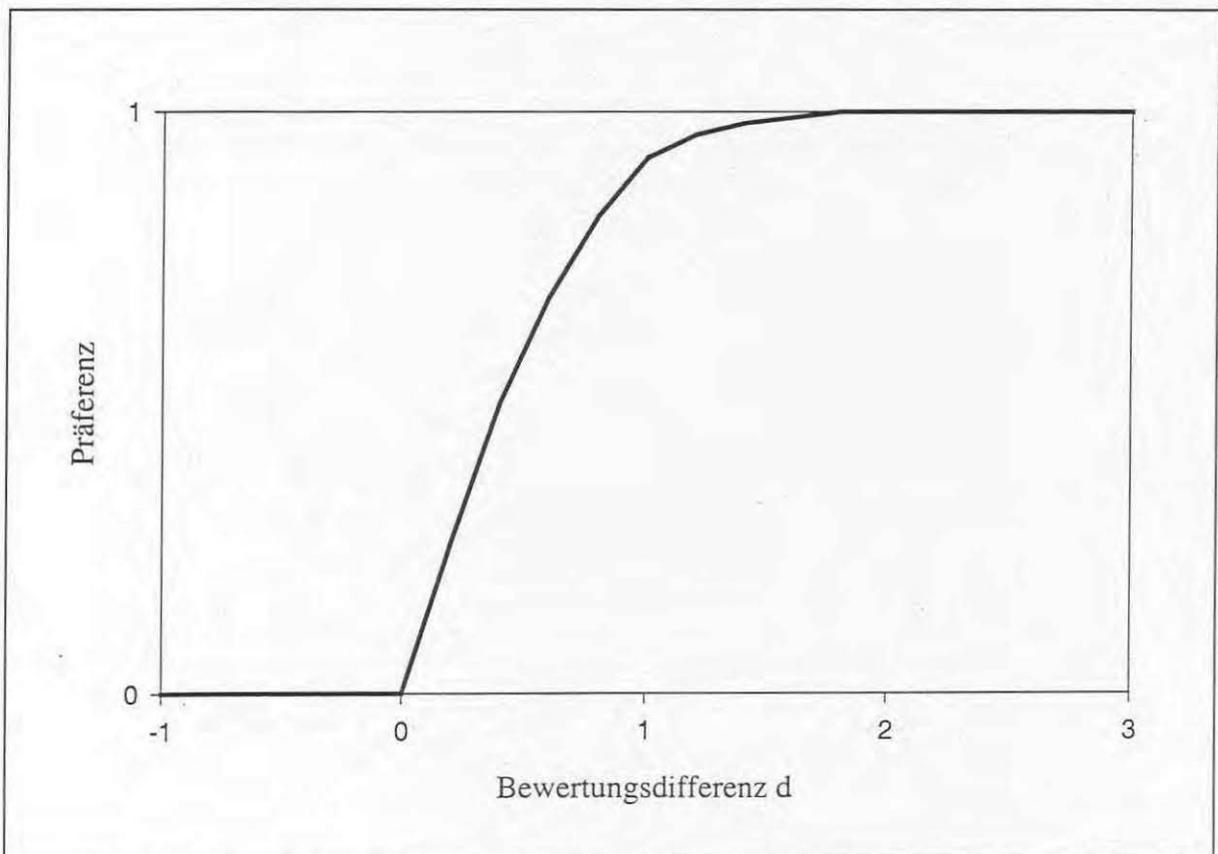


Abb. 4: Stochastische Präferenz P als Funktion der Differenz d zwischen den wahrscheinlichsten Bewertungen, $m(a)$ und $m(b)$. Die Differenz d ist skaliert in Einheiten der Fehlerbreite s (siehe Text).

$m(a)-m(b)$, desto größer die Präferenz von A über B. Dies ist ganz ähnlich zu Abbildung 1 (gestrichelte Linie), wo ebenfalls die Präferenz von A über B mit der Differenz $d_i(A,B)$ der Bewertungen von A und B ansteigt.

3.2 Signifikanz

Als letzte Vorbereitung für die stochastische Erweiterung der Entscheidungsverfahren aus Kapitel 2 soll in diesem Kapitel noch der Begriff der Signifikanz eingeführt werden, ähnlich wie es ihn auch in der Statistik gibt (vgl. Bley Müller et al. 1985). Es sei jedoch bemerkt, daß das hier vorgestellte Signifikanzkriterium gegenüber den in der Statistik üblichen Kriterien stark vereinfacht ist, aber mit diesen verwandt ist und in ähnlicher Weise interpretiert werden kann. Als erstes stellt man fest, daß die Standardabweichung einer Zufallszahl, deren Verteilung durch eine Dreiecksfunktion (Abb. 3) gegeben ist, sich zu

$$\sigma(a) = \left(\int_{m(a)-s(a)}^{m(a)+s(a)} p(a) * [a - m(a)]^2 da \right)^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{12}} s(a) \approx \frac{1}{3} s(a) \quad (9)$$

berechnet. $1/\sqrt{12}$ ist etwa $1/3$, so daß die Standardabweichung einer dreiecksverteilten Zufallszahl wie in Abbildung 3 etwa ein Drittel der Differenz zwischen Maximalwert ($m(a)+s(a)$) und wahrscheinlichstem Wert ($m(a)$) ist.

Eine Zufallszahl bezeichne ich nun als signifikant größer als eine Zufallszahl b, wenn

$$m(a) - 1,5\sigma(a) > m(b) + 1,5\sigma(b), \quad (10)$$

was nach Gleichung (9) etwa der Bedingung $m(a)-0,5s(a) > m(b)+0,5s(b)$ entspricht. Einen solchen Fall zeigt gerade Abbildung 3. Die zugehörige stochastische Präferenz läßt sich (Kapitel 3.1) zu $\Pi(A,B)=0,95$ berechnen, was in der Statistik ein übliches Signifikanzkriterium ist.

4 Stochastisches PROMETHEE 1 (SP1)

In diesem Kapitel soll anhand eines Beispiels die stochastische Präferenz (Kapitel 3.1) in das PROMETHEE 1 – Verfahren aus Kapitel 2 integriert werden. Das neue Verfahren soll stochastisches PROMETHEE 1 (SP1) – Verfahren heißen. Ausgangspunkt sei die Ergebnismatrix (Tab. 1). Für jede Alternative und jedes Kriterium ist dort genau ein Wert angegeben, von dem anzunehmen ist, daß er der wahrscheinlichste ist. Ich nehme nun aber an, daß die Bewertungen in Tabelle 1 Fehlern unterliegen, so daß sich mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit auch andere als die in Tabelle 1 angegebenen Werte ergeben können. Die Wahrscheinlichkeit, zu einer bestimmten Alternative bezüglich eines bestimmten Kriteriums eine bestimmte Bewertung zu erzielen, sei durch eine Dreiecksverteilung (Abb. 3) beschrieben, mit

dem wahrscheinlichsten Wert nach Tabelle 1. Da für die Maximal- und Minimalwerte der 6 mal 6 Dreiecksverteilungen keine Daten vorliegen, verwende ich zur Demonstration hypothetische Zahlenwerte. Für jede der 6 mal 6 Bewertungen ermittele ich Maximal- und Minimalwerte, indem ich den wahrscheinlichsten Wert aus Tabelle 1 mit einem Fehlerfaktor zwischen null und eins multipliziere. Man betrachte z. B. die Bewertung der Alternative A bezüglich Kriterium 1. Der wahrscheinlichste Wert ist -80 (vgl. Tab. 1) und ich wähle einen (hypothetischen) Fehlerfaktor von 0,31. Der Maximalwert der Bewertung ist dann $-80 \cdot (1 - 0,31) = -55,2$ und der Minimalwert beträgt $-80 \cdot (1 + 0,31) = -104,8$. In derselben Weise behandle ich auch die anderen Bewertungen. Die erzielten Maximal- und Minimalwerte finden sich in Tabelle 2.

Tab. 2: Maxima (oben) und Minima (unten) der Bewertungsergebnisse (gerundet) für die Kriterien 1 bis 6 und Alternativen A bis F.

Alternative		A	B	C	D	E	F
1	max	-55	-51	-51	-2	-29	-52
	min	-105	-79	-115	-78	-75	-136
2	max	178	86	66	102	140	121
	min	2	30	54	58	4	71
3	max	-246	-82	-184	-780	-876	-84
	min	-954	-318	-616	-1220	-324	-1316
4	max	-12	-31	-48	-20	-10	-33
	min	-96	-163	-96	-130	-30	-39
5	max	-6	0	0	-2	-2	-4
	min	-10	-2	-8	-12	-4	-6
6	max	8	2	9	20	13	9
	min	2	0	5	0	3	3

Für jedes Alternativenpaar und jedes Kriterium ermittele ich nun die Präferenz Π_i . Vergleicht man beispielsweise die Alternativen A und B bezüglich Kriterium 4, so ergibt sich nach dem in Kapitel 3.1 beschriebenen Verfahren, daß A mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,9 besser abschneidet als B. Nach Gleichung (8) errechnet sich daraus die Präferenzfunktion $\Pi_4(A,B)$ zu 0,8 (gleichzeitig gilt $\Pi_4(B,A)=0$).

Für die weiteren 5 Kriterien $i=1, 2, 3, 5$ und 6, ergeben sich Präferenzen $\Pi_i(A,B)$ von 0,0; 0,6; 0,0; 0,0 und 1,0. Die Outranking-Relation $\Pi(A,B)$ erhält man durch Multiplikation dieser $\Pi_i(A,B)$ mit den Gewichtungsfaktoren w_i und anschließendes Summieren. Ich gehe hier davon aus, daß alle sechs Kriterien gleich stark gewichtet werden, also $w_i=1/6$ ($i=1\dots 6$) und erhalte $\Pi(A,B)=0,4$. Analog ermitteln sich die Outranking-Relationen zu allen anderen Alternativenpaaren (Tab. 3).

Tab. 3: Outranking-Relationen Π mit Zeilen- und Spaltensummen.

Alternative Alternative	A	B	C	D	E	F	$\Sigma\Pi$
A	0	0,40	0,21	0,28	0,05	0,12	1,06
B	0,46	0	0,42	0,33	0,33	0,47	2,02
C	0,39	0,28	0	0,29	0,14	0,26	1,36
D	0,30	0,52	0,40	0	0,15	0,26	1,63
E	0,43	0,51	0,44	0,48	0	0,61	2,48
F	0,33	0,50	0,33	0,48	0,09	0	1,73
$\Sigma\Pi$	1,92	2,21	1,81	1,86	0,75	1,72	

Die erste Zeile der Matrix der Outranking-Relationen (Tab. 3) enthält (auf den fünf Nichtdiagonal-Elementen) die Outranking-Relationen $\Pi(A,B)$, $\Pi(A,C)$,..., $\Pi(A,F)$. Die Summation dieser Größen (also die Summe über die Elemente der ersten Zeile von Tab. 3), ergibt den Ausgangsfluß $\Phi^+(A)$ (Gl. 2). Analog ergeben sich die Ausgangsflüsse der anderen Alternativen B bis F durch Summieren der Elemente der entsprechenden Zeilen in Tabelle 3.

Die erste Spalte von Tabelle 3 enthält die fünf Outranking-Relationen $\Pi(B,A)$, $\Pi(C,A)$,..., $\Pi(F,A)$. Ihre Summe (also die Summe über die Elemente der ersten Spalte) ergibt den Eingangsfluß $\Phi^-(A)$ (Gl. 3). Analog erhält man die Eingangsflüsse zu den anderen Alternativen B bis F (Tab. 4).

Tab. 4: Ausgangs- (Φ^+), Eingangs- (Φ^-) und Nettoflüsse (Φ).

Alternative	A	B	C	D	E	F
Φ^+	1,06	2,02	1,36	1,63	2,48	1,73
Φ^-	1,92	2,21	1,81	1,86	0,75	1,72
Φ	-0,86	-0,18	-0,46	-0,23	1,72	0,01

Aus diesen Flüssen ist nun die Präordnungsmatrix zu ermitteln. Dazu wird für jedes Alternativenpaar untersucht, ob Dominanz, Indifferenz oder Unvergleichbarkeit vorliegt. Beispielsweise gilt $\Phi^+(E) > \Phi^+(F)$ und $\Phi^-(E) < \Phi^-(F)$. Nach den Regeln in Kapitel 2.1 dominiert die Alternative E die Alternative F. Dagegen gilt $\Phi^+(A) < \Phi^+(B)$ und $\Phi^-(A) < \Phi^-(B)$. Damit sind die Alternativen A und B nicht miteinander vergleichbar. Das Ergebnis dieser Tests für alle Alternativenpaare führt schließlich zur Präordnungsmatrix (Tab. 5). Das Element in Zeile C, Spalte A (ein „D“) bedeutet beispielsweise, daß Alternative C die Alternative A dominiert.

Tab. 5: Präordnungsmatrix: I steht für „indifferent“, R für „nicht vergleichbar“, D für „dominiert“ und kein Eintrag für „wird dominiert“.

Alternative Alternative	A	B	C	D	E	F
A	I	R				
B	R	I	R	R		R
C	D	R	I	R		
D	D	R	R	I		
E	D	D	D	D	I	D
F	D	R	D	D		I

Die Präordnungsmatrix läßt sich durch Abbildung 5 graphisch darstellen. Man sieht, daß Alternative E alle anderen dominiert, also vorzuziehen ist. Alternative A wird von allen anderen außer B dominiert. Die Alternativen C und D, die von E und F dominiert werden und ihrerseits A dominieren, sind nicht miteinander vergleichbar. Alternative B ist außer mit der dominanten Alternative E mit keiner der anderen Alternativen vergleichbar.

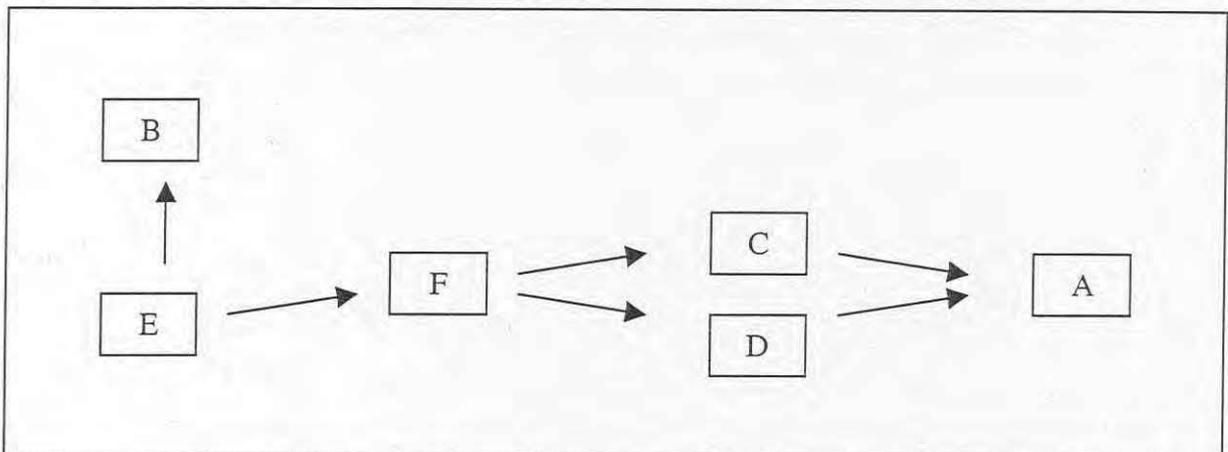


Abb. 5: Graphische Darstellung der Präordnungsmatrix (Tab. 5).

Zur Interpretation dieses Ergebnisses kann man sagen, daß die Trade-offs, die im Vergleich der Alternative E mit anderen Alternativen bestehen mögen, zugunsten von E entschieden wurden. Dagegen liegen beispielsweise zwischen B und den anderen Alternativen außer E nicht auflösbare bzw. nicht entscheidbare Trade-offs vor.

Wie beschrieben, kann man Vergleichbarkeit erzwingen, indem man die Nettoflüsse Φ der Alternativen (Tab. 4) betrachtet. Hier erhält man die Rangfolge (beginnend mit der dominantesten Alternative) E, F, B, D, C, A. Die in Abbildung 5 „neben“ D stehende Alternative C wurde also hinter C eingeordnet, die „unvergleichbare“ Alternative B zwischen F und D.

5 Stochastisches PROMETHEE 2 (SP2)

Ein Vorteil des oben beschriebenen SP1 ist seine Verwandtschaft mit dem konventionellen Verfahren, da die verwendete stochastische Präferenzfunktion (Gl. 8) eng verwandt mit konventionellen Präferenzfunktionen ist (Abb. 1 in Kapitel 3.1). Ein Nachteil ist, daß die Information über die Unsicherheit, nachdem sie vollständig in die Präferenzfunktion (Gl. 8) eingegangen ist, in den weiteren Schritten des PROMETHEE-Verfahrens nicht mehr sichtbar ist. Die Berechnung der Outranking-Relationen aus den Präferenzen erfolgt in derselben Weise wie beim konventionellen PROMETHEE-Verfahren. Es ist nicht mehr unmittelbar nachvollziehbar, wie sich die Unsicherheit auf die Outranking-Relationen, die Flüsse und die Präordnungsmatrix auswirkt. Betrachtet man z. B. die Eingangsflüsse Φ^- für die Alternativen C und D im Beispiel von Tabelle 4, so stellt man fest, daß sie sich nur unwesentlich voneinander unterscheiden. Trotzdem hat die Frage, welche von beiden größer ist, großen Einfluß darauf, ob Alternative D die Alternative C dominiert oder ob beide (wie im Beispiel von Tab. 4) unvergleichbar sind. Eine kleine numerische Differenz hat also eine große Wirkung. Ist dies im Wissen um die teils großen Unsicherheiten in den Bewertungen (Tab. 2) gerechtfertigt? Wenn nein, wie groß müßte der Unterschied zwischen beiden Eingangsflüssen sein, um die Entscheidung für oder gegen Dominanz von D über C zu rechtfertigen? Diese Frage führt unmittelbar auf den Signifikanzbegriff, der in Kapitel 3.2 eingeführt wurde. Dort stand die Frage im Mittelpunkt, wie groß sich die Mittelwerte zweier Zufallszahlen bei gegebener Unsicherheit unterscheiden müssen, um behaupten zu können, daß sich beide Zufallszahlen signifikant voneinander unterscheiden. Um also etwas über die Verlässlichkeit der Rangordnung der Alternativen zu erfahren, soll dieser Signifikanzaspekt in das PROMETHEE-Verfahren integriert werden. Das neue Verfahren soll stochastisches PROMETHEE 2 (SP2) – Verfahren heißen.

Während im SP1 die Zufälligkeit vollständig in die Paarvergleiche der Alternativen einging, woran sich dann ein konventionelles PROMETHEE-Verfahren anschloß, soll jetzt andersherum verfahren werden. Ich starte mit konventionellen Elementen des PROMETHEE-Verfahrens und ende mit der Stochastik. Die Wahrscheinlichkeit, für eine bestimmte Alternative und ein bestimmtes Kriterium ein bestimmtes Bewertungsergebnis zu erzielen, sei wieder durch die zugehörige Dreiecksverteilung (Abb. 3) mit Mittelwert aus Tabelle 1 und Unsicherheitsbereich aus Tabelle 2 gegeben. Basierend auf diesen 6 mal 6 Dreiecksverteilungen ermittele ich als erstes für jede Alternative und jedes Kriterium je einen zufälligen Zahlenwert. Ich erhalte eine Matrix mit 6 mal 6 Zahlen, jede gehörig zu einer bestimmten Alternative und einem bestimmten Kriterium. Jede dieser Zahlen stellt ein mögliches Bewertungsergebnis dar. Die gesamte Matrix (sie sei mit E_1 bezeichnet) der zufällig ermittelten Zahlenwerte stellt also eine mögliche Konfiguration; oder in der Sprache der Wahrscheinlichkeitstheorie „Realisation“, der Ergebnismatrix dar.

Die Ergebnismatrix E_1 wird nun nach einem konventionellen PROMETHEE-Verfahren ausgewertet. Es werden also, wie in Kapitel 2.1 beschrieben, die Alternativen auf Basis der Werte von E_1 paarweise und für jedes Kriterium einzeln miteinander verglichen. Als Präfe-

renzkriterium verwende ich das in Abbildung 1 (durchgezogene Linie) gezeigte. Aus den kriterienweisen Paarvergleichen der Alternativen erhalte ich, wie in Kapitel 2.1 beschrieben, die Outranking-Relationen und die Flüsse. Der Einfachheit halber betrachte ich nur die Nettoflüsse (man kann aber feststellen, daß bei Verwendung der Präferenzfunktion nach Abbildung 1 (durchgezogene Linie) Unvergleichbarkeiten sehr unwahrscheinlich sind und daher die Nettoflüsse dieselbe Information enthalten wie die Präordnungsmatrix).

Wie erwähnt, handelt es sich aber bei der Matrix E_1 nur um eine mögliche Realisation der Ergebnismatrix, gleiches gilt für die Nettoflüsse. Würde man basierend auf den Tabellen 1 und 2 eine andere Realisation, E_2 , der Ergebnismatrix ermitteln, so ergäben sich mit großer Wahrscheinlichkeit andere Nettoflüsse. Für das SP2-Verfahren interessiert nun, welche Nettoflüsse man im Rahmen dieser Unsicherheit erwarten kann und wie stark sie schwanken können. Um ein vollständiges Bild der Unsicherheit zu erhalten, muß eine sehr große Zahl N an möglichen Realisationen der Ergebnismatrix E_1, E_2, \dots, E_N betrachtet werden. Für jede Realisation wird (per Computer) ein konventionelles PROMETHEE-Verfahren durchgeführt und die Nettoflüsse ermittelt. Den Nettofluß der Alternative A beispielsweise, den ich aus der Ergebnismatrix E_k erhalten habe, bezeichne ich als $\Phi_k(A)$. Der Erwartungs- oder Mittelwert des Nettoflusses für Alternative A ($m(\Phi(A))$) ist nun das Mittel über die N Nettoflüsse für Alternative A ($\Phi_k(A)$ ($k=1\dots N$)):

$$m(\Phi(A)) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \Phi_k(A) . \quad (11)$$

Die Standardabweichung ist

$$\sigma(\Phi(A)) = \left(\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N [\Phi_k(A) - m(\Phi(A))]^2 \right)^{1/2} . \quad (12)$$

Die Mittelwerte und Standardabweichungen der Nettoflüsse aller 6 Alternativen zeigt Tabelle 6.

Tab. 6: Mittelwerte und Standardabweichungen der Nettoflüsse.

Alternative	A	B	C	D	E	F
$m(\Phi)$	-1,12	-0,18	-0,43	-0,20	1,98	-0,04
$\sigma(\Phi)$	0,88	0,52	0,70	0,77	0,80	0,71

Diese Ergebnisse sind in Abbildung 6 noch einmal graphisch dargestellt.

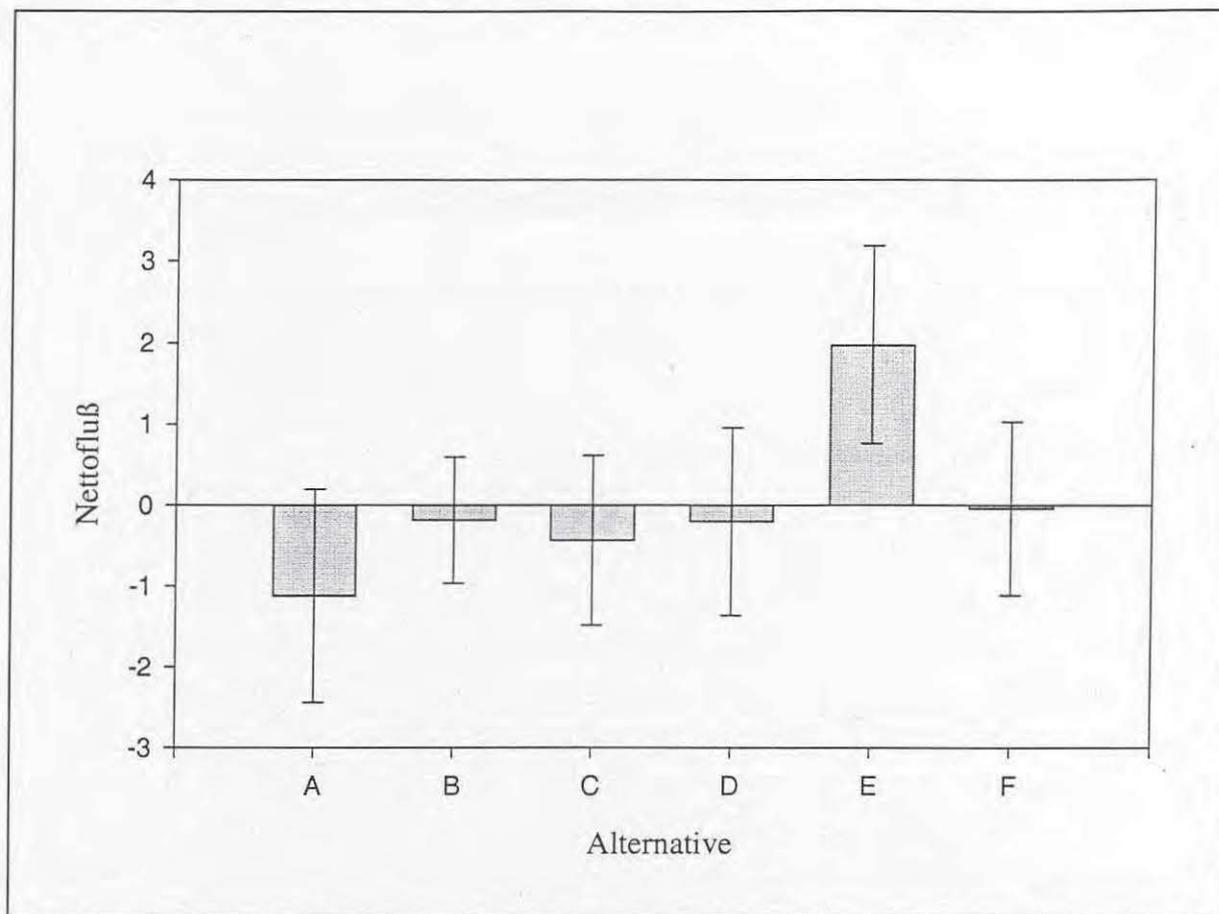


Abb. 6: Nettoflüsse Φ der Alternativen A bis F. Die grauen Balken geben die Mittelwerte an, die schwarzen Linien sind Fehlerbalken (s. Text).

Die Balken zeigen die Mittelwerte $m(\Phi)$ der Nettoflüsse; die Fehlerbalken sind gerade dreimal so lang (vom Mittelwert 1,5 Einheiten nach oben und 1,5 Einheiten nach unten) wie die Standardabweichung $\sigma(\Phi)$. Man sieht, daß Alternative E am besten abschneidet und selbst der untere Rand ihres Fehlerbalkens bis auf D und F über den Fehlerbalken der anderen Alternativen liegt (die Fehlerbalken überlappen sich nur geringfügig). Der Mittelwert des Nettoflusses $m(\Phi(E))$ minus 1,5 mal seiner Standardabweichung $\sigma(\Phi(E))$ ist also größer als der Mittelwert $m(\Phi(X))$ einer anderen Alternative $X \in \{A, B, C, D, F\}$ plus 1,5 mal deren Standardabweichung $\sigma(\Phi(X))$. In Kapitel 3.2 (Gl. 10) hatte sich ergeben, daß in einem solchen Fall der Nettofluß $\Phi(E)$ als signifikant größer angesehen werden kann als der Nettofluß $\Phi(X)$. Das bedeutet, daß die Alternative E signifikant den größten Nettofluß besitzt, also alle anderen Alternativen signifikant dominiert.

Am schlechtesten schneidet Alternative A ab. Der obere Rand ihres Nettofluß-Fehlerbalkens in Abbildung 6 liegt nie weit über den unteren Enden der anderen Fehlerbalken, der Überlapp mit den anderen Fehlerbalken ist also gering. Damit kann man auch schließen, daß der Nettofluß der Alternative A „ziemlich“ signifikant unter denen der anderen Alternativen liegt, Alternative A also ziemlich signifikant von allen anderen Alternativen dominiert

wird. Im Gegensatz dazu überlappen die Fehlerbalken der anderen Alternativen B, C, D und F stark. Die Nettoflüsse dieser Alternativen unterscheiden sich nicht signifikant. Keine dieser Alternativen dominiert also eine andere aus dieser Vierergruppe signifikant.

Dieses Ergebnis ist nicht unähnlich dem aus der Präordnungsmatrix des SP1 (Abb. 5). Dort hatte sich gezeigt, daß die Alternativen B, C und D nicht vergleichbar sind. Der Unvergleichbarkeit im SP1 entspricht die Insignifikanz im SP2. Lediglich bezüglich Alternative F gibt es eine Abweichung. Sie dominierte im SP1 die Alternative B, C und D, was im SP2 nicht der Fall ist.

6 Stochastische Hauptachsenanalyse (SHA)

Ebenso wie im SP2 die Schwankungsbreite der Nettoflüsse von Interesse war, um zu entscheiden, ob sich Alternativen in ihrer Dominanz signifikant unterscheiden, so interessiert auch in der Hauptachsenanalyse (Kapitel 2.2), ob sich Alternativen, die in der konventionellen Hauptachsenanalyse als Punkte dargestellt sind (Abb. 2), signifikant voneinander unterscheiden. Die Integration der Stochastik verläuft ganz analog zum SP2. Wie in Kapitel 5 erzeuge ich zunächst N zufällige Realisationen der Ergebnismatrix E_1, E_2, \dots, E_N . Für jede dieser Realisationen führe ich eine konventionelle Hauptachsenanalyse durch (Technisch ist es einfacher, einen etwas anderen Weg zu gehen (Anhang). Beide Wege sind jedoch äquivalent und die Ergebnisse identisch). Jede der N Hauptachsenanalysen liefert einen Satz aus 12 Datenpunkten (vgl. Abb. 2): sechs Punkte stellen die Kriterien dar und sechs die Alternativen. Die Lage dieser 12 Datenpunkte, also ihre x - und y -Koordinaten im Hauptachsenraum, variiert nun, wenn unterschiedliche Ergebnismatrizen E_k verwendet werden. Analog zu Kapitel 5 interessieren für jeden der 12 Datenpunkte seine mittlere Position und ihre Schwankungsbreite. Dazu berechne ich für jeden der 12 Datenpunkte die Mittelwerte $m(x)$ und $m(y)$ sowie die Standardabweichungen $\sigma(x)$ und $\sigma(y)$ seiner x - und y -Koordinaten, wenn alle Realisationen E_1 bis E_N der Ergebnismatrix berücksichtigt werden. Das Ergebnis zeigt Abbildung 7. Zu sehen sind die mittleren Positionen der 12 Punkte, also der sechs Alternativen und der sechs Kriterien. Für jede einzelne der sechs Alternativen wurden zusätzlich die Standardabweichungen in x - und y -Richtung eingetragen, sichtbar als Rechtecke, die um den jeweiligen Mittelwert gelegt sind. Der Abstand der Rechteckseiten vom Mittelpunkt (nach oben und unten bzw. nach rechts und links) ist gerade 1,5 mal der Standardabweichung der y - bzw. der x -Koordinate. Die Ausdehnung eines Rechtecks gibt also die Unsicherheit über die Position der Alternative im Hauptachsenraum wieder.

Dies ist ganz ähnlich wie in Abbildung 6. Dort gab die Länge der Fehlerbalken das Ausmaß der Unsicherheit wieder. Tatsächlich handelt es sich bei Abbildung 7 um ein zweidimensionales Gegenstück zu Abbildung 6. Den (eindimensionalen) Fehlerbalken dort entspricht das (zweidimensionale) Rechteck hier. In Abbildung 6 galt, daß sich zwei Alternativen dann signifikant unterscheiden, wenn sich ihre Fehlerbalken nicht überlappen. Analog gilt hier, daß sich zwei Alternativen dann signifikant unterscheiden, wenn sich ihre Rechtecke nicht oder nur geringfügig überlappen.

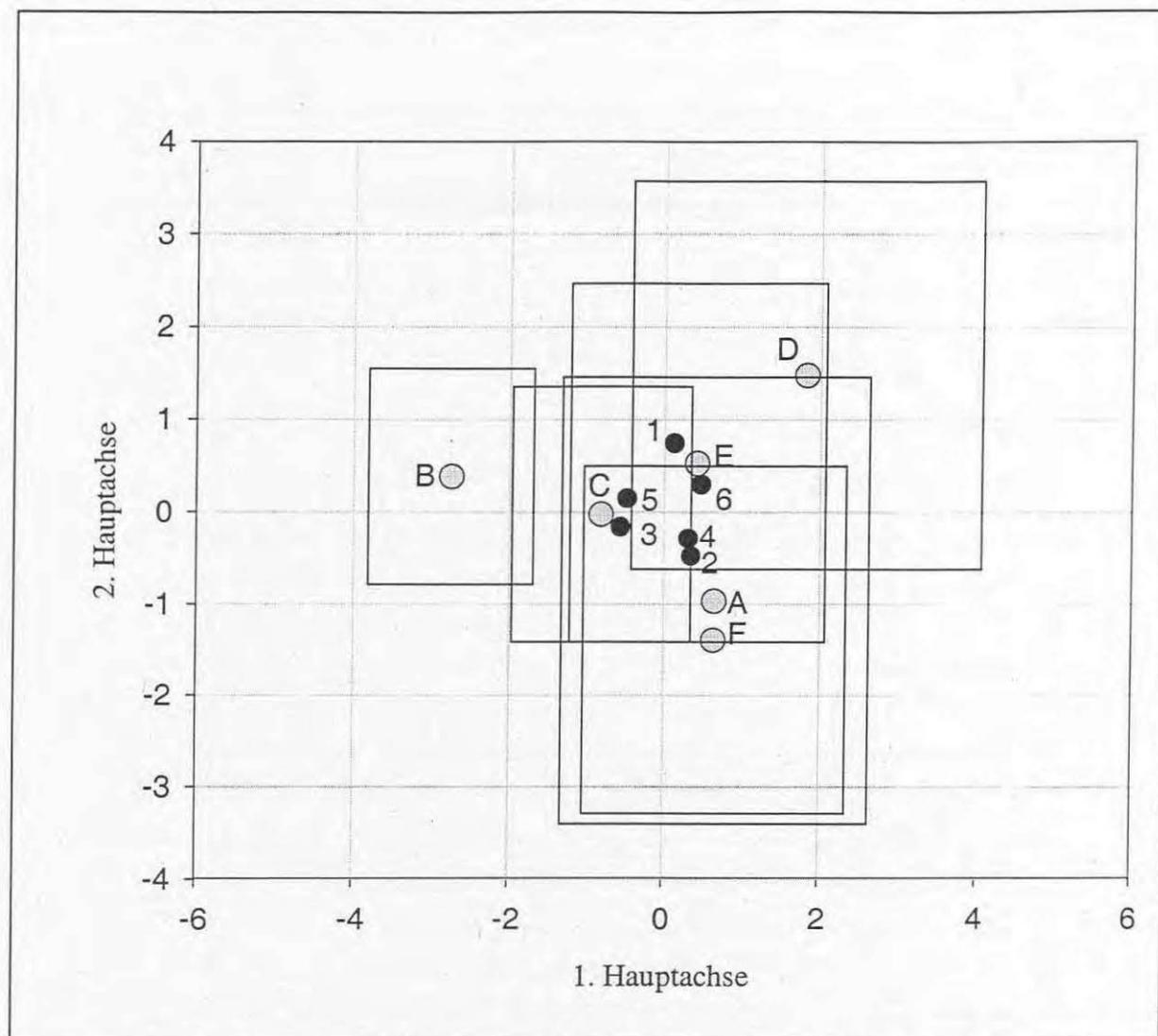


Abb. 7: Kriterien 1 bis 6 (schwarze Punkte) und Alternativen A bis F (graue Punkte) im Hauptachsenraum. Um jede der sechs Alternativen liegt zentrisch ein Rechteck, das die Unsicherheit in der Position dieser Alternative im Hauptachsenraum widerspiegelt.

Dies findet man beispielsweise für Alternative B. Sie unterscheidet sich daher signifikant von allen anderen Alternativen. Dagegen ist der Überlapp zwischen den Alternativen A und F vollständig. Sie unterscheiden sich nicht signifikant. Auch wenn die Methodik zwischen SP2 und der SHA sehr ähnlich ist, sollte bemerkt werden, daß die Ergebnisse natürlich eine völlig andere Bedeutung haben (vgl. Kapitel 2). Während es bei PROMETHEE um bessere oder schlechtere Alternativen geht, geht es bei der Hauptachsenanalyse um Korrelationen oder qualitative Verwandtschaften. Wenn man sagt, daß sich in der SHA Alternative B signifikant von allen anderen unterscheidet, heißt das nicht, daß sie signifikant besser oder schlechter als die anderen ist, sondern daß sich die Art und Weise, wie sie die sechs Kriterien erfüllt, signifikant von der anderer Alternativen unterscheidet. Alternative B ist also auf gewisse Weise einmalig und kann nicht durch eine andere Alternative ersetzt oder mit ihr verglichen werden.

Im SP1 hatte sich ein ähnliches Resultat ergeben, nämlich daß Alternative B mit keiner der anderen Alternativen (außer mit E) vergleichbar ist. Die Trade-offs zwischen B und den anderen Alternativen sind unauflösbar bzw. unentscheidbar. Gleiches findet man für die beiden Alternativen C und D: geringer Überlapp der Rechtecke in Abbildung 7 und Unvergleichbarkeit im SP1 (Abb. 5). Recht gering ist in Abbildung 7 auch der Überlapp zwischen den Alternativen F und D, die allerdings in Abbildung 5 vergleichbar sind. Trotz der großen Gemeinsamkeiten in den Ergebnissen von SP1 und SHA gibt es also kleine Unterschiede, die aber größtenteils dadurch entstehen, daß nicht klar zu entscheiden ist, was man als geringen oder starken Überlapp ansieht.

7 Zusammenfassung und Diskussion

Die multikriterielle Entscheidungsanalyse dient dazu, die Ergebnisse separater monokriterieller Bewertungen zu synthetisieren und Handlungsalternativen danach zu bewerten, wie gut sie die Kriterien in ihrer Gesamtheit erfüllen. Es wurden zwei multikriterielle Entscheidungsverfahren vorgestellt und so erweitert, daß Unsicherheit in den Ergebnissen der multikriteriellen Bewertung explizit berücksichtigt werden können. Die drei entwickelten Verfahren sind bezüglich der Berücksichtigung von Unsicherheit miteinander verwandt und die Ergebnisse ergänzen sich. Das stochastische PROMETHEE 1 – Verfahren (SP1) und die stochastische Hauptachsenanalyse (SHA) liefern Erkenntnisse darüber, welche Handlungsalternativen miteinander vergleichbar sind und welche nicht. Das stochastische PROMETHEE 2 – Verfahren (SP2) und die SHA liefern quantitative Informationen darüber, wie sich die Unsicherheit in den multikriteriellen Bewertungsergebnissen auf die Ergebnisse der Entscheidungsanalyse auswirkt. Die beiden stochastischen PROMETHEE-Verfahren liefern Informationen über die Rangordnung der Handlungsalternativen, also darüber, welche Alternativen die Gesamtheit der Kriterien am besten erfüllen. Die SHA konzentriert sich auf das Auffinden von Trade-offs zwischen verschiedenen Alternativen und von Korrelationen zwischen verschiedenen Kriterien.

Vergleichbare Ansätze zur expliziten Berücksichtigung von Unsicherheit in multikriteriellen Entscheidungsverfahren findet man auch bei Munda (1995) und bei van den Honert (1998). Anstatt explizite Verteilungsfunktionen für die Bewertungen (Abb. 3) anzunehmen, verwendet Munda (1995) nur die Minima, Maxima und den wahrscheinlichsten Wert (also Daten wie sie in den Tabellen 1 und 2 angegeben sind). Daraus ermittelt er sogenannte Fuzzy-Präferenzen, die dann mit Hilfe der Fuzzy-Logik weiterverarbeitet werden. Der Vorteil hierbei ist, daß man nicht gezwungen ist, die Form der Verteilung der Bewertungen (z. B. Dreiecksform wie in Kapitel 4 geschehen) anzugeben. Das gibt der Analyse Mundas zunächst eine größere Allgemeingültigkeit. Dagegen muß aber bemerkt werden, daß man beim Rechnen mit Fuzzy-Größen bestimmte logische Operatoren verwenden muß. Hier gibt es Freiheiten, und wenn man sich für einen bestimmten Satz an Operatoren entscheidet, ist damit die Allgemeingültigkeit ebenfalls eingeschränkt. Isoliert betrachtet erscheinen daher beide Verfahren, das von Munda (1995) und das SP1, gleichwertig. Der Vorteil des hier vorgestellten Konzepts ist

allerdings, daß dem SP1 noch zwei weitere Analysen zur Seite gestellt wurden, die wie gezeigt, äquivalente Ergebnisse liefern. Dies verbessert die Interpretationsmöglichkeiten und die Glaubwürdigkeit der Ergebnisse. Eine derartige Kombination mit anderen Verfahren, insbesondere mit der SHA, ist mit dem Verfahren von Munda (1995) schwer zu verwirklichen.

Van den Honert (1998) geht einen ähnlichen Weg wie beim SP2, das heißt es wird untersucht, wie sich Unsicherheit in den multikriteriellen Bewertungsergebnissen quantitativ auf die Unsicherheit in der Rangordnung der Alternativen auswirkt. Anstatt auf dem PROMETHEE-Verfahren, basiert van den Honert (1998) seine Analyse auf dem sogenannten „Analytical Hierarchy Program“ (AHP). Der Vorteil seines Verfahrens ist, daß es sich komplett ohne Zuhilfenahme numerischer Methoden wie Monte-Carlo-Simulation durchführen läßt. Der Nachteil ist jedoch, daß extrem große Unsicherheiten zu Schwierigkeiten führen können. Das ist in den hier vorgestellten PROMETHEE-Verfahren nicht der Fall. Extrem große Unsicherheit beispielsweise in der Bewertung einer Alternative A in einem Kriterium i führt lediglich dazu, daß beim Vergleich von A mit einer anderen Alternative X die Wahrscheinlichkeit, besser abzuschneiden, nahe 50% ist. Damit gilt für die Präferenzfunktionen $\Pi_i(A,X)=\Pi_i(X,A)=0$. Die weitere Analyse wird dadurch nicht weiter behindert.

Zum Schluß sollte noch auf einen kritischen Punkt hingewiesen werden, nämlich die Gewichtung der Kriterien. In den beiden PROMETHEE-Verfahren geht sie über die Gewichtungsfaktoren w_i ein (Gl. 1). Mir ist kein Verfahren bekannt, welches das Problem der richtigen Wahl der Gewichtungsfaktoren umgehen kann, außer der deskriptiven Analyse, z. B. der gezeigten Hauptachsenanalyse. Dort werden die Kriterien per Definitivum gleichgewichtet, um eine neutrale Aussage zu den Zusammenhängen zwischen Kriterien und Alternativen zu erhalten. Die Präferenzen der Entscheidenden sind hier irrelevant. In dem Moment aber, wo eine Bewertung oder Rangordnung von Alternativen angestrebt wird, ist es unerlässlich, daß die entscheidende Person eine Angabe dazu macht, wie wichtig ihr welche Kriterien im Vergleich zu anderen sind. Gerade bei der Festlegung der Gewichtungsfaktoren kann man ein großes Maß an Unsicherheit und Variabilität (insbesondere wenn unterschiedliche Personen mit entgegengesetzten Interessen befragt werden) auftreten. Eine Möglichkeit, diese Unsicherheit in das Verfahren zu integrieren ist, verschiedene Kombinationen von Gewichtungsfaktoren zu testen und die Wirkung auf die Rangordnung zu bestimmen. Eine elegantere Möglichkeit ist – ähnlich wie für die Bewertungen (Tab. 2) – für die Gewichtungsfaktoren wahrscheinlichste Maximal- und Minimalwerte zu ermitteln und daraus für jeden Gewichtungsfaktor eine Verteilungsfunktion, etwa wie in Abbildung 3 zu erstellen. Ähnlich wie im SP2 kann man aus diesen Verteilungsfunktionen L Kombinationen von Gewichtungsfaktoren erzeugen und für jede Kombination die Nettoflüsse der Alternativen bestimmen. Nun kann man wie im SP2 wieder die Nettoflüsse zu den L verschiedenen Kombinationen der Gewichtungsfaktoren mitteln und mittlere Nettoflüsse bzw. Standardabweichungen bestimmen. Wie im SP2 erhält man eine unsicherheitsbehaftete Rangordnung, wobei diesmal die Unsicherheit in der Rangordnung die Unsicherheit in den Gewichtungsfaktoren reflektiert.

Literatur

- Bley Müller, J., Gehlert, G., Gülicher, H. (1985): WiSt-Studienkurs. Statistik für Wirtschaftswissenschaftler. Vahlen. München
- Brans, J.P., Mareschal, B. (1990): The PROMETHEE methods for MCDM; the PROMCALC, GAIA and BANKADVISER software. In: Bana e Costa, C.A. (ed.): Readings in Multiple Criteria Decision Aid. Springer. Berlin
- Honert, R.C. van den (1998): Stochastic pairwise comparative judgements and direct ratings of alternatives in the REMBRANDT system. *Journal of Multi Criteria Decision Analysis* 7, pp. 87-97
- Marggraf, R., Streb, S. (1997): Ökonomische Bewertung der natürlichen Umwelt. Spektrum Akademischer Verlag. Heidelberg. Berlin
- Munda, G. (1995): *Multicriteria Evaluation in a Fuzzy Environment*. Physica. Heidelberg
- Randerson, P.F. (1993): Ordination. In: Frey, J.C. (ed.): *Biological Data Analysis*. IRL Press at Oxford University Press. Oxford
- Sieben, G., Schildbach, T. (1994): *Betriebswirtschaftliche Entscheidungstheorie*. Werner-Verlag. Düsseldorf
- Stewart, T.J. (1992): A critical survey on the status of multiple criteria decision making – theory and practice. *OMEGA International Journal of Management Science* 20 (5/6), pp. 569-586
- Zimmermann, H.-J. (1991): *Fuzzy set theory and its applications*. 2. Aufl. Kluwer Academic Publishers. Boston
- Zimmermann, H.-J., Gutsche, L. (1991): *Multi-Criteria Analyse*. Springer. Berlin. Heidelberg. New York

Anhang

Im folgenden sollen ein paar mathematische Einzelheiten zur Technik der Hauptachsenanalyse dargestellt werden, wobei ich mich an der Arbeit von Randerson (1993) orientiere. Ich beginne mit der konventionellen, also nicht stochastischen Analyse. Ausgangspunkt ist die Ergebnismatrix nach Tabelle 1, die ich mit E bezeichne.

Als erstes wird die Ergebnismatrix standardisiert, das heißt ich reskaliere ihre Elemente so, daß für jede Zeile (also jedes Kriterium) der Mittelwert der Elemente null (Zentrierung der Matrix) und die Standardabweichung eins (Normierung der Matrix) ist. Letzteres sorgt für eine gleichgewichtete Berücksichtigung aller Zeilen (Kriterien) in der Analyse. Dies ist sinnvoll, da es sich bei der vorliegenden Analyse um eine deskriptive, vergleichende Analyse handelt, bei der alle Kriterien gleichermaßen und gleichwertig berücksichtigt werden. Ich bezeichne die Elemente von E als e_{ij} , wobei i die Zeile (Kriterium) und j die Alternative bezeichnet. Das Zeilenmittel, das heißt der Mittelwert über die Elemente einer Zeile, ist dann

$$m_i = \frac{1}{6} \sum_{j=1}^6 e_{ij} \quad (\text{A1})$$

und die Standardabweichung ist

$$\sigma_i = \left(\frac{1}{6} \sum_{j=1}^6 (e_{ij} - m_j)^2 \right)^{1/2} \quad (\text{A2})$$

Die Reskalierung der Matrix E erfolgt über

$$e_{ij}' = \frac{e_{ij} - m_j}{\sigma_j} \quad (\text{A3})$$

Die Matrix E' mit den Elementen e_{ij}' ist nun zentriert und normiert, enthält aber nach wie vor dieselbe Informationen über die Zusammenhänge zwischen Kriterien und Alternativen wie E .

Als nächstes wird eine Korrelationsmatrix R zwischen den Zeilen (Kriterien) berechnet. Da es sechs Kriterien gibt, hat diese Korrelationsmatrix sechs mal sechs Elemente, die ich mit r_{mn} ($m, n=1 \dots 6$) bezeichne. Die Elemente berechnen sich über

$$r_{mn} = \sum_{j=1}^6 e_{mj}' e_{nj}' \quad (\text{A4})$$

Die Elemente r_{mn} , welche stets zwischen -1 und $+1$ liegen, geben an, wie ähnlich sich die Kriterien in der Ergebnismatrix E sind. Wird beispielsweise das erste Kriterium von einigen Alternativen (im Vergleich zu anderen) überdurchschnittlich gut, von anderen Alternativen mittelmäßig und von wieder anderen unterdurchschnittlich erfüllt, und gilt dasselbe auch für Kriterium 2, so sind sich beide Kriterien ähnlich und der Korrelationskoeffizient (r_{12}) zwischen beiden Kriterien ist dicht bei 1. Verhalten sich die beiden Kriterien entgegengesetzt, also sind die Alternativen, die gut in Kriterium 1 sind, schlecht in Kriterium 2 und umgekehrt, so ist der Korrelationskoeffizient r_{12} nahe -1 . Gibt es keinen Zusammenhang, so sind beide Kriterien unabhängig voneinander oder unkorreliert und r_{12} ist nahe null. Die Matrix R wird nun einer Eigenwertanalyse unterzogen, das heißt zu lösen ist das Gleichungssystem

$$\sum_{n=1}^6 r_{mn} v_n = \lambda v_m \quad (m=1\dots 6). \quad (\text{A5})$$

Dabei ist λ der Eigenwert und $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_6)$ der sechs-elementige Eigenvektor des Gleichungssystems. Gleichung (A5) hat sechs Lösungen, das heißt, es gibt sechs Eigenwerte mit je einem zugehörigen Eigenvektor. Um die beiden dominanten Hauptachsen zu erhalten, betrachte ich die beiden größten Eigenwerte, $\lambda^{(1)}$ und $\lambda^{(2)}$, mit den zugehörigen Eigenvektoren $\mathbf{v}^{(1)} = (v^{(1)}_1, v^{(1)}_2, v^{(1)}_3, v^{(1)}_4, v^{(1)}_5, v^{(1)}_6)$ und $\mathbf{v}^{(2)}$ und bilde

$$x_j = \sqrt{\lambda^{(1)}} v_j^{(1)} \quad \text{und} \quad y_j = \sqrt{\lambda^{(2)}} v_j^{(2)} \quad (j=1\dots 6). \quad (\text{A6})$$

Die erhaltenen x_j und y_j ($j=1\dots 6$) sind gerade die Koordinaten der Kriterien $j=1\dots 6$ im Hauptachsenraum. Es sollte der Vollständigkeit halber festgestellt werden, daß in manchen Fällen auch die dritte Hauptachse (mit dem drittgrößten Eigenwert $\lambda^{(3)}$) oder gar noch weitere Achsen berücksichtigt werden müssen. Im allgemeinen genügen jedoch die beiden ersten. Ferner ist zu sagen, daß die Multiplikation der Eigenvektoren $\mathbf{v}^{(1)}$ und $\mathbf{v}^{(2)}$ mit $\lambda^{(1)}$ bzw. $\lambda^{(2)}$ willkürlich, wenn auch gängige Praxis, ist. Wie in Kapitel 6 schon erwähnt, sind daher nur die relativen Abstände zwischen Punkten im Hauptachsenraum, nicht aber die absoluten Abstände, eindeutig bestimmt.

Die Koordinaten x_i und y_i ($i=1\dots 6$) der $i=1\dots 6$ Alternativen erhält man durch Multiplikation der Transponierten von E' mit den beiden Eigenvektoren $\mathbf{v}^{(1)}$ und $\mathbf{v}^{(2)}$:

$$x_i = \sum_{j=1}^6 e_{ij} v_j^{(1)} \quad \text{und} \quad y_i = \sum_{j=1}^6 e_{ij} v_j^{(2)}. \quad (\text{A7})$$

Die im folgenden beschriebene stochastische Hauptachsenanalyse ist eine relativ einfache Erweiterung des beschriebenen Rechenablaufs. Wie in den Kapiteln 5 und 6 erwähnt, gehe ich von N zufälligen Replikationen der Ergebnismatrix aus. Diese N Replikationen schreibe ich

nebeneinander zu einer Matrix mit nach wie vor sechs Zeilen (Kriterien), aber nun $6N$ Spalten, die ich mit j durchnummere, wobei jede sechste Spalte, das heißt die Spalten $j=1, 7, 13, \dots, 6N-5$ die Bewertungen der ersten Alternative angeben. Entsprechend geben die Spalten $2, 8, 14, \dots, 6N-4$ die Bewertungen der zweiten Alternative an, usw. Diese $6N$ -spaltige Matrix wird nun genauso behandelt wie zuvor die sechsspaltige Ergebnismatrix E , das heißt, sie wird zentriert und normiert, so daß die Summe jeder Zeile (jetzt mit $6N$ Elementen) null und ihre Standardabweichung eins ist. Dies geschieht über die Gleichungen (A1) und (A2), wobei j in den Summationen jetzt von 1 bis $6N$ läuft. Die zentrierte und normierte Ergebnismatrix bezeichne ich mit E'' und ihre Elemente mit e_{ij}'' (mit Zeilen $i=1 \dots 6$ und Spalten $j=1 \dots 6N$). Wieder wird eine 6-mal-6 elementige Korrelationsmatrix berechnet, wobei in Gleichung (A4) diesmal j von 1 bis $6N$ läuft. Alle N Replikationen gehen also gleichwertig in die Korrelationsmatrix ein, deren Elemente die zu erwartenden Korrelationen zwischen den Zielen widerspiegeln. Die Hauptachsenanalyse (Gl. A5) für diese Matrix liefert wieder sechs Eigenwerte und sechs Eigenvektoren mit je sechs Elementen. Die Eigenvektoren zu den beiden größten Eigenwerten bezeichne ich mit $w^{(1)}$ und $w^{(2)}$. Sie liefern über Gleichung (A6) die Koordinaten der sechs Kriterien im Hauptachsenraum. Diese geben die zu erwartende Position der sechs Kriterien im Hauptachsenraum an.

Um die Koordinaten für die Alternativen zu erhalten, multipliziere ich wieder die transponierte von E'' mit den beiden Eigenvektoren

$$x_i' = \sum_{j=1}^{6N} e_{ij}'' w_j^{(1)} \quad \text{und} \quad y_i' = \sum_{j=1}^{6N} e_{ij}'' w_j^{(2)}. \quad (\text{A8})$$

und erhalte 2 $6N$ -spaltige Vektoren. Da wie oben erwähnt die Spalten $1, 7, 13, \dots, 6N-5$ der Matrix E'' die Bewertungen der Alternative 1 angeben, geben nun auch die Elemente $x_1', x_7', x_{13}', \dots, x_{(6N-5)}'$ die N Replikationen für die x -Koordinate der ersten Alternative an. Analoges gilt für die N Replikationen der y -Koordinate. Die Replikationen der x -Koordinate von Alternative 2 sind analog $x_2', x_8', x_{14}', \dots, x_{(6N-4)}'$; entsprechendes gilt für die y -Koordinaten.

Wie in Kapitel 6 erwähnt, interessieren die Mittelwerte und die Standardabweichungen der x - und y -Koordinaten der sechs Alternativen. Den Mittelwert, $m_A(x)$ der x -Koordinate der ersten Alternative erhält man über

$$m_A(x) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x_{(6k-5)}; \quad (\text{A9})$$

die Standardabweichung ist

$$\sigma_A(x) = \left(\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \{x_{(6k-5)} - m_A(x)\}^2 \right)^{1/2}. \quad (\text{A10})$$

Entsprechendes gilt für Mittelwert ($m_A(y)$) und Standardabweichung ($\sigma_A(y)$) der y -Koordinate. Analog berechnen sich die Mittelwerte und Standardabweichungen der Koordinaten für die anderen fünf Alternativen B bis F.

Naturressourcenschutz und wirtschaftliche Entwicklung

Nachhaltige Wasserbewirtschaftung und Landnutzung im Elbeeinzugsgebiet

Helga Horsch und Irene Ring (Hrsg.)

GIS und Kartographie: Annegret Kindler

UFZ-Umweltforschungszentrum Leipzig-Halle GmbH