Hydrosystemanalyse: Einführung

Prof. Dr.-Ing. habil. Olaf Kolditz

[1]Helmholtz Centre for Environmental Research – UFZ, Leipzig

[2]Technische Universität Dresden – TUD, Dresden

Dresden, 17. Juli 2015

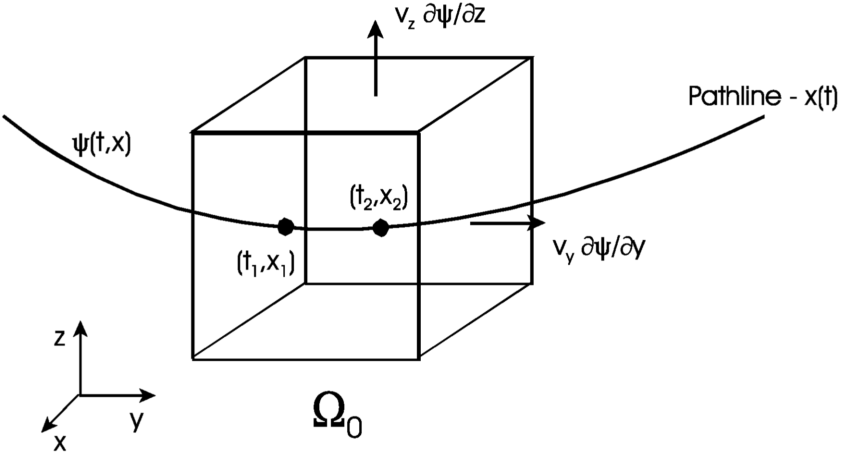
Vorlesungsplan Hydroinformatik II SoSe 2015

#	Datum	Thema
01	17.04.2015	Einführung, Grundlagen: Kontinuumsmechanik
02	24.04.2015	Grundlagen: Kontinuumsmechanik/Hydromechanik
-	01.05.2015	Maifeiertag
03	08.05.2015	HW: Einführung in Qt (Installation)
04	15.05.2015	Grundlagen: Partielle Differentialgleichungen / TeX
05	22.05.2015	Grundlagen: Numerische Methoden
-	29.05.2015	Pfingsten
06	05.06.2016	Numerik: (exp) Finite Differenzen Methode
07	12.06.2015	Numerik: (imp) Finite Differenzen Methode
08	19.06.2015	Gerinnehydraulik: Theorie - Grundlagen
09	26.06.2015	Gerinnehydraulik: Programmierung, Übung 1
10	03.07.2015	Gerinnehydraulik: Programmierung, Übung 2
11	10.07.2015	Gerinnehydraulik: Programmierung, Übung 3
12	17.07.2015	Kurs-Zusammenfassung, Ausblick und Beleg

Fahrplan für heute ...

- Grundlagen (kurze Wiederholung)
- Grundwassergleichung
- Prinzip-Beispiel
- Bilanzierung
- Berechnungsverfahren
- Lösung
- Übung HSA1: Programmierung für Prinzip-Beispiel

Das Euler Prinzip (Wdh)



Fluid Momentum Balance (Wdh)

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = \mathbf{f}^e + \frac{1}{\rho}\nabla \cdot \sigma \tag{1}$$

In index notation the above vector equation is written as

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} &= \frac{1}{\rho}(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z}) \\
\frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z} &= \frac{1}{\rho}(\frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z}) \\
\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z} &= g + \frac{1}{\rho}(\frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z})
\end{aligned} \tag{2}$$

with $u = v_x, v = v_y, w = v_z$ and $\mathbf{f}^e = \mathbf{g}$.

Flow Equations - Systematic (Wdh)

Stress Tensor

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + \tau \tag{3}$$

Navier-Stokes Equation

$$\boxed{\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = \mathbf{f}^e - \frac{1}{\rho}\nabla p + \nu \Delta \mathbf{v}} \tag{4}$$

Euler Equation

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = \mathbf{f}^e - \frac{1}{\rho}\nabla p \tag{5}$$

Stokes Equation

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \mathbf{f}^e - \frac{1}{\rho}\nabla p + \nu \Delta \mathbf{v} \tag{6}$$

Darcy Equations

$$0 = \mathbf{f}^e - \frac{1}{\rho}\nabla p + \nu \Delta \mathbf{v} \tag{7}$$

Grundwassergleichung

$$\frac{\partial n\rho}{\partial t} + \nabla \cdot (n\rho\mathbf{v}) = Q_\rho \tag{8}$$

Für ein inkompressibles Fluid gilt dann (PF)

$$\rho\frac{\partial n}{\partial t} + \rho\nabla \cdot (n\mathbf{v}) = Q_\rho \tag{9}$$

oder noch besser

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot (n\mathbf{v}) = \frac{Q_\rho}{\rho_0} \tag{10}$$

In der Grundwasserhydraulik gilt

$$\frac{\partial n}{\partial t} = S\frac{\partial h}{\partial t} \tag{11}$$

$$n\mathbf{v} = \mathbf{q} = -\mathbf{K}\nabla h \quad \text{(Darcy Gesetz)} \tag{12}$$

Grundwassergleichung - Parameter

Dabei sind: S der Speicherkoeffizient, h die Piezometer- oder hydraulische Höhe, $\mathbf{q}$ die Darcy- oder Filtergeschwindigkeit und $\mathbf{K}$ der hydraulische Leitfähigkeitstensor.

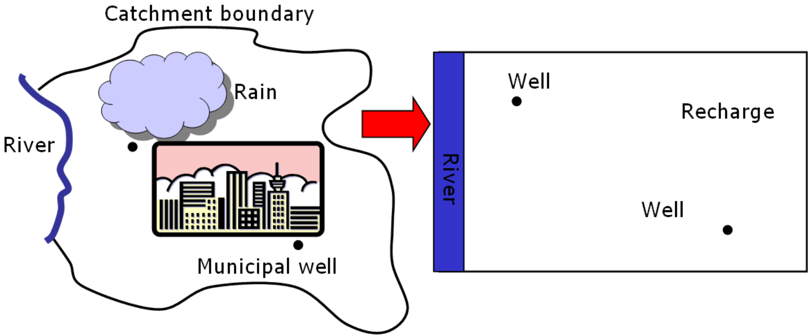
Grundwassergleichung

$$
\begin{aligned}
S\frac{\partial h}{\partial t} + \nabla \cdot (n\mathbf{v}) &= Q \\
S\frac{\partial h}{\partial t} - \nabla \cdot (\mathbf{K}\nabla h) &= Q \\
S\frac{\partial h}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\left(K_x \frac{\partial h}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(K_y \frac{\partial h}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(K_z \frac{\partial h}{\partial z}\right) &= Q
\end{aligned}
$$

Wir begnügen uns mit einem 2-D horizontalen Modell.

$$
S\frac{\partial h}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\left(K_x \frac{\partial h}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(K_y \frac{\partial h}{\partial y}\right) = Q \tag{13}
$$

Prinzip-Beispiel



Prinzip-Beispiel

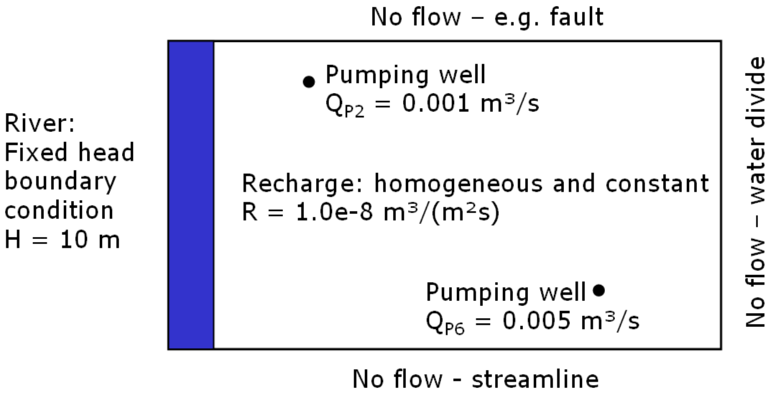


Abbildung: Definition der Randbedingungen

Prinzip-Beispiel

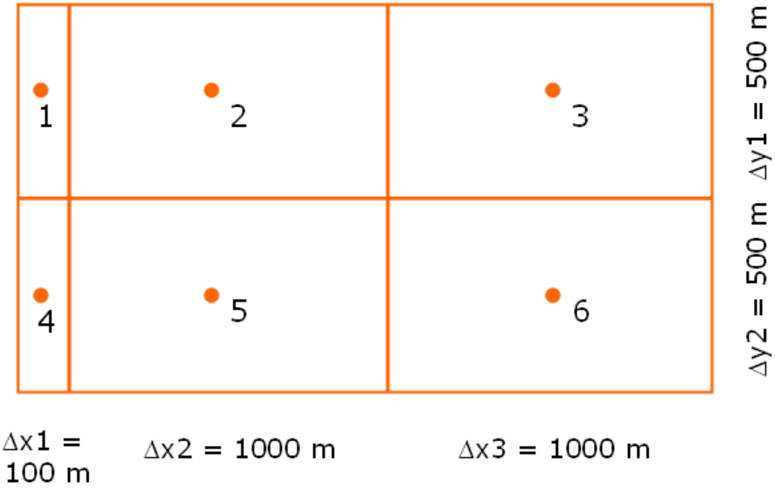


Abbildung: Bilanzierungs-Schemata

Prinzip-Beispiel

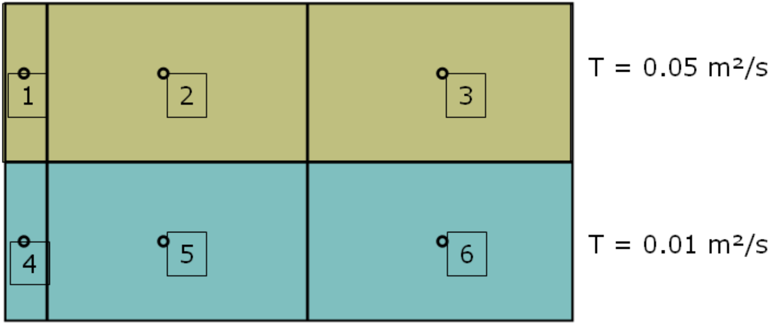


Abbildung: Definition der Materialgruppen

$$T = \frac{K}{S} \tag{14}$$

Prinzip-Beispiel

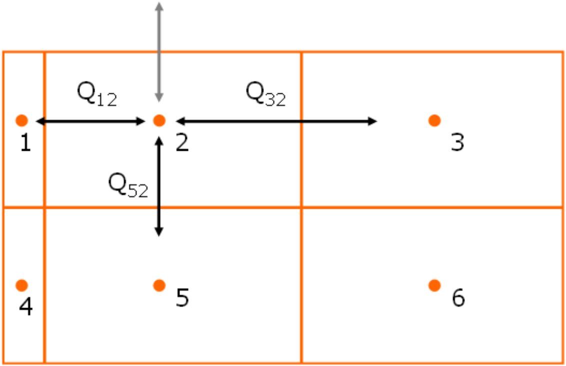


Abbildung: Knoten-Bilanz aufstellen

$$Q_{12} + Q_{32} + Q_{52} + Q_R + Q_{P2} = 0 \tag{15}$$

Prinzip-Beispiel

Wir benutzen folgendes Differenzenschema.

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{h_i - h_j}{x_i - x_j} \tag{16}$$

$$\frac{\partial h}{\partial y} = \frac{h_i - h_j}{y_i - y_j} \tag{17}$$

Da unser FD-Gitter weder equidistant und unser Aquifer noch heterogen ist, schreiben wir besser.

$$\frac{\partial h}{\partial x}|_{12} = \frac{h_1 - h_2}{\Delta x_1/2 + \Delta x_5/2} \tag{18}$$

Prinzip-Beispiel - Transmissivität

- Berechnung von (hydraulischen) Widerständen - harmonisches Mittel
$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$
- Transmissivität
$$T_{12} = \frac{\Delta x_1 + \Delta x_2}{\Delta x_1 / T_1 + \Delta x_2 / T_2}$$

Prinzip-Beispiel

$$Q_x = \Delta y T_x \frac{\partial h}{\partial x}$$

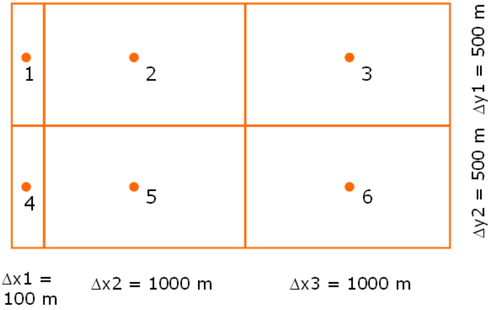
Damit können wir für die Flussterme schreiben.

$$Q_{12} = \Delta y_1 \frac{\Delta x_1 + \Delta x_2}{\Delta x_1 / T_1 + \Delta x_2 / T_2} \times \frac{h_1 - h_2}{\Delta x_1/2 + \Delta x_2/2} \tag{19}$$

$$Q_{52} = \Delta x_2 \frac{\Delta y_5 + \Delta y_2}{\Delta y_5 / T_5 + \Delta y_2 / T_2} \times \frac{h_5 - h_2}{\Delta y_5/2 + \Delta y_2/2} \tag{20}$$

- Tafelbild

Prinzip-Beispiel



Die Zahlen eingesetzt ergibt sich für

$$
\begin{aligned}
Q_{12} &= 0.454545 - 0.0454545 h_2 \\
Q_{52} &= 0.03333 h_5 - 0.03333 h_2 \\
Q_{32} &= 0.02500 h_3 - 0.02500 h_2 \\
Q_R &= R \Delta x_2 \Delta y_1 = 0.005 \\
Q_{P2} &= -0.001
\end{aligned}
\tag{21}
$$

Prinzip-Beispiel - Lösungsverfahren

- Bilanzbleichungen für alle Zellen (2,3,4,5):

$$
\begin{aligned}
2 &: 0.458545 - 0.103788 h_2 + 0.025 h_3 + 0.03333 h_5 = 0 \\
3 &: 0.0050 + 0.0250 h_2 - 0.0583 h_3 + 0.0333 h_6 = 0 \\
5 &: 0.0959 + 0.0333 h_2 - 0.0474 h_3 + 0.0050 h_6 = 0 \\
6 &: 0.0000 + 0.0333 h_3 + 0.0050 h_5 - 0.0383 h_6 = 0
\end{aligned}
\tag{22}
$$

- Gleichungssystem lösen

$$
\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \tag{23}
$$

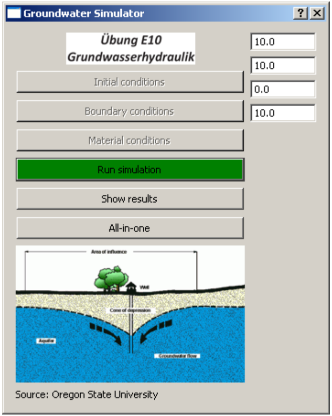
Prinzip-Beispiel - Übung HSA#1

Ergebnis:

$$
\begin{aligned}
h_1 &= 10.00 \\
h_2 &= 10.24 \\
h_3 &= 10.41 \\
h_4 &= 10.00 \\
h_5 &= 10.31 \\
h_6 &= 10.39
\end{aligned} \tag{24}
$$

$$ \tag{25} $$

Übung HSA#1



Eigenes MatLab ...

- Funktions-Simulator FDM Simulator (explizit und implizit)
- Newton Simulator
- ... alles noch 1D, schau'n wir mal (Systemanalyse)
- 2D FDM Grundwassersimulator

Übung HSA#1 - Ausblick